

# Développements pour l'agrégation externe de Mathématiques

Dimitri A. COBB

10 septembre 2020

## Préface et avertissement

Ce document présente quelques idées de développements que j'ai préparées en 2017-2018 en vue de l'agrégation externe de Mathématiques. Cependant, le lecteur ne doit pas s'attendre à trouver une famille totale de développements, une surjection d'un ensemble de couples de développements vers l'ensemble des leçons, ou même une liste de développements "prêts à l'emploi" qui pourraient être consommés après seulement quelques minutes dans le micro-ondes...

Tout d'abord, ne sont rassemblés ici que quelques uns de mes développements. Ceux-ci sont choisis parmi ceux qui me semblent les moins courants ou ceux dont la découverte m'a procuré le plus de plaisir. Ce ne sont donc pas des considérations "stratégiques" qui ont guidé le choix du contenu de ce texte. Il ne s'agit pas de savoir si tel développement a déjà subi l'épreuve du feu, ou s'il peut être "recasé" dans une grande variété de leçons avec un minimum de mauvaise foi. Il ne s'agit que d'une chose : tenter de trouver des Mathématiques intéressantes.

Ensuite, les Mathématiques dans leur habitat naturel ne vivent pas dans le cadre restreint de quinze minutes ou d'un programme prédéfini. Ainsi, bon nombre des développements de ce texte ont nécessité un certain travail d'adaptation pour rentrer dans le format demandé aux oraux de l'agrégation. Et ce travail n'est pas terminé ! Certaines des démonstrations sont un peu trop longues, ou reposent sur un lemme dont la démonstration ferait dépasser l'exposé des quinze minutes réglementaires. Et le tout a un aspect assez expérimental, puisque seulement deux de ces preuves (le théorème de la dimension de Tate et la non-dérivabilité partout de la fonction de Weierstraß<sup>1</sup>) ont été exposées devant un véritable jury d'agrégation.

Terminons cet avant-propos en disant quelques mots sur la forme de ce texte.

- Les développements sont précédés d'une référence bibliographique, lorsque que j'ai connaissance d'un ouvrage où il peuvent être trouvés. Cependant, il arrive que certaines démonstrations ne me sont parvenues que comme des exercices de colle, de TD, ou des morceaux de cours. Je ne me suis

---

1. Pour les leçons sur les interversions de limites et d'intégrales et sur les représentations linéaires des groupes finis.

pas alors systématiquement démené pour trouver un livre qui pourrait les contenir.

- Les démonstrations sont aussi complètes que possible. Dans un oral sur un sujet spécifique, certaines parties pourraient être omises ou abrégées afin de mettre l'accent sur les point les plus pertinents.
- Chaque section se termine par une ou plusieurs remarques supplémentaires qui fournissent des précisions, des extensions, ou simplement un peu de contexte.

Sur tout cela, j'espère que le lecteur pourra trouver dans ce texte autant de plaisir que j'ai eu à l'assembler. Je lui souhaite une excellente lecture !

D. C.

## Table des matières

1	Un modèle pour l'équation de transport	4
2	Un ensemble de Sidon	5
3	Théorème d'Uchiyama	8
4	Théorème de la dimension de Tate	11
5	Groupe orthogonal d'un plan quadratique	14
6	Théorème de Springer	16
7	Dérivées faibles des fonctions lipschitziennes	18
8	Une majoration pour les partitions d'entiers	20
9	Traces, polynômes caractéristiques et extensions de corps	23
10	La fonction de Weierstra $\beta$	25
11	Théorème des phases de Salem	27
12	Théorème de Kolmogorov sur la convergence de séries aléatoires	31
13	Inégalité d'Etemadi et convergence de séries aléatoires	34
14	Alternative de Fredholm	36
15	Théorème du point fixe de Brouwer dans le plan	39
16	Méthode d'optimisation d'Armijo	43
17	Inégalités de Cheeger pour les graphes	45
18	Flots Hamiltoniens	49
19	Notations	51

# 1 Un modèle pour l'équation de transport

Le contenu de cette section est adapté du remarquable cours de François Castella sur les problèmes de transport donné à l'Université de Rennes 1 en 2016-2017.

**Théorème 1.** Soit  $d \geq 1$  et  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  une fonction de classe  $C^1$  dont la différentielle est bornée  $\|\nabla f\|_{L^\infty} < +\infty$ . Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $X_0 : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^d$  une variable aléatoire de loi  $\mu_0$ . Pour  $t \in \mathbb{R}$ , on note  $X_t$  la solution du système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \frac{d}{dt} X_t = f(X_t) \\ X_{t=0} = X_0 \end{cases}, \quad (1)$$

lequel admet des solutions globales<sup>2</sup>. Alors la loi  $\mu_t$  de  $X_t$  vérifie

$$\frac{d}{dt} \mu_t + f \cdot \nabla \mu_t + \operatorname{div}(f) \mu_t = 0 \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d). \quad (2)$$

Ici,  $\frac{d}{dt} \mu_t$  est la distribution (bien définie) donnée par :

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d), \quad \left\langle \frac{d}{dt} \mu_t, \phi \right\rangle = \frac{d}{dt} \langle \mu_t, \phi \rangle. \quad (3)$$

*Démonstration.* On se munit de  $\varphi_0^t : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}^d$  le flot du système différentiel (1).

Soit  $U \subset \mathbb{R}^d$  un borélien. Alors, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_t \in U) &= \mathbb{P}(\varphi_0^t(X_0) \in U) = \mathbb{P}(X_0 \in \varphi_t^0(U)) \\ &= \int \mathbb{1}_{x \in \varphi_t^0(U)} d\mu_0(x) = \int \mathbb{1}_{\varphi_0^t(x) \in U} d\mu_0(x) = \int \mathbb{1}_U \circ \varphi_0^t(x) d\mu_0(x). \end{aligned} \quad (4)$$

On a donc

$$\int \phi(x) d\mu_t(x) = \int \phi \circ \varphi_0^t(x) d\mu_0(x), \quad (5)$$

d'abord pour toute fonction  $\phi$  étagée positive, puis pour toute fonction  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . Fixons  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ . Alors,

$$\frac{d}{dt} \int \phi(x) d\mu_t(x) = \int \frac{\partial}{\partial t} \phi \circ \varphi_0^t(x) d\mu_0(x) = \int [\nabla \phi \cdot f] \circ \varphi_0^t(x) d\mu_0(x). \quad (6)$$

Mais la relation (5) nous assure que ce dernier terme a précisément pour valeur

$$\frac{d}{dt} \int \phi(x) d\mu_t(x) = \int f \cdot \nabla \phi(x) d\mu_t(x) = \langle \mu_t, f \cdot \nabla \phi \rangle \quad (7)$$

$$= \sum_{k=1}^d \langle \mu_t, f_k \partial_k \phi \rangle = \sum_{k=1}^d \langle f_k \mu_t, \partial_k \phi \rangle = - \sum_{k=1}^d \langle \partial_k (f_k \mu_t), \phi \rangle \quad (8)$$

$$= - \sum_{k=1}^d \langle \partial_k f_k \mu_t + f_k \partial_k \mu_t, \phi \rangle \quad (9)$$

$$= - \langle \operatorname{div}(f) \mu_t + f \cdot \nabla \mu_t, \phi \rangle \quad (10)$$

---

2. Le champ de vecteurs est globalement lipschitzien.

Ceci assure que  $\frac{d}{dt}\mu_t$  est bien définie en tant que distribution et termine la preuve de l'énoncé.  $\square$

*Remarque 2.* On aurait pu voir dès le départ que  $\frac{d}{dt}\mu_t$  est bien une distribution. En effet, si  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ ,

$$\left\langle \frac{d}{dt}\mu_t, \phi \right\rangle = \lim_{h \rightarrow 0} \left\langle \frac{\mu_{t+h} - \mu_t}{h}, \phi \right\rangle, \quad (11)$$

ce qui fait que l'on a la limite

$$\frac{\mu_{t+h} - \mu_t}{h} \xrightarrow{h \rightarrow 0} \frac{d}{dt}\mu_t \quad \text{dans } \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d). \quad (12)$$

On conclut en se souvenant que toute limite de distributions (dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ ) est également une distribution.

## 2 Un ensemble de Sidon

Le contenu de cette section est adapté de [10], chapitre 5 section IV sur les ensembles de Sidon pp. 206-210.

Soit  $\mathbb{U} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  le cercle unité et  $q \geq 3$  un nombre entier. On note  $\Lambda = \{q^k, k \geq 0\}$ .

**Théorème 3.** *Soit  $f \in L^\infty(\mathbb{U})$  telle<sup>3</sup> que  $\text{Sp}(f) = \text{supp}(\hat{f}) \subset \Lambda$ . Alors*

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} |\hat{f}(n)| \leq C_\Lambda \|f\|_{L^\infty}, \quad (13)$$

où  $C_\Lambda \leq 2$  est une constante qui ne dépend que de  $q$ .

*Démonstration.* Soit  $(a_k)_{k \in \Lambda} \in l^\infty(\Lambda)$  une suite bornée. On va montrer l'existence d'une mesure positive  $\mu$  sur  $\mathbb{U}$  telle que :

1. Les coefficients de Fourier de  $\mu$  sont égaux à  $a$  sur  $\Lambda$  :

$$\forall k \in \Lambda, \quad \hat{\mu}(k) := \int_{\mathbb{U}} e^{-ikt} d\mu(t) = a_k \quad (14)$$

2. La masse totale de  $\mu$  est majorée par la norme  $l^\infty$  de  $a$  :

$$\|\mu\| := \int_{\mathbb{U}} d\mu \leq C_\Lambda \|a\|_{l^\infty}. \quad (15)$$

Supposons –temporairement– acquise l'existence d'une telle mesure pour chaque  $a \in l^\infty$ . Alors nous pouvons conclure :

$$\sum_{k \in \Lambda} |\hat{f}(k)| = \sup_{\|a\|_{l^\infty} \leq 1} \left| \sum_{k \in \Lambda} a_k \hat{f}(k) \right| \leq \sup_{\|\mu\| \leq C_\Lambda} \left| \sum_{k \in \Lambda} \hat{\mu}(k) \hat{f}(k) \right| \quad (16)$$

$$= \sup_{\|\mu\| \leq C_\Lambda} |f * \mu(0)| \leq C_\Lambda \|f\|_{L^\infty} < +\infty. \quad (17)$$

---

3. L'espace  $L^\infty(\mathbb{U})$  est l'espace des classes de fonctions mesurables bornées  $2\pi$ -périodiques. Notons que c'est bien un espace de Banach, mais il n'est pas séparable.

Ici, le produit de convolution  $f * \mu$  est défini par :

$$f * \mu(x) = \int_{\mathbb{U}} f(x-t) d\mu(t). \quad (18)$$

Il nous reste à montrer l'existence d'une telle mesure  $\mu$ .

Tout d'abord, on peut supposer  $\|a\|_{l^\infty} \leq 1/2$ , et nous chercherons alors  $\mu$  de masse totale  $\|\mu\| \leq 1$ . Posons, pour  $n \geq 1$ ,

$$P_n(t) = \prod_{k=1}^n \left(1 + a_k e^{iq^k t} + \bar{a}_k e^{-iq^k t}\right) = \prod_{k=1}^n \left(1 + 2|a_k| \cos(q^k t + \phi_k)\right), \quad (19)$$

où les  $\phi_k \in \mathbb{R}$  sont des phases choisies de sorte à ce que l'égalité soit vérifiée. Ces polynômes trigonométriques sont des *produits de Riesz*. Puisque  $\|a\|_{l^\infty} \leq 1/2$ , ce sont des fonctions positives  $P_n \geq 0$ . Par ailleurs, leur spectre est exactement

$$\text{Sp}(P_n) = \left\{ \sum_{k=1}^n \epsilon_k q^k, \quad \epsilon_k \in \{-1, 0, 1\} \right\}. \quad (20)$$

Comme  $q \geq 3$ , chaque  $N \in \text{Sp}(P_n)$  admet une unique décomposition  $q$ -adique de la forme  $N = \sum_k \epsilon_k q^k$ . On en déduit que  $\hat{P}_n(0) = 1^n = 1$  et que  $\hat{P}_n(q^k) = a_k 1^{n-1} = a_k$  pour  $k \geq 0$ . La positivité de  $P_n$  fournit alors

$$\|P_n\|_{L^1} = \int_{\mathbb{U}} |P_n(t)| \frac{dt}{2\pi} = \int_{\mathbb{U}} P_n(t) \frac{dt}{2\pi} = 1. \quad (21)$$

En particulier,  $P_n$  définit une mesure de probabilité sur  $\mathbb{U}$ .

Pour conclure, nous nous servons du lemme suivant :

**Lemme 4** (Compacité séquentielle faible). *Soit  $E$  un espace normé séparable et  $T_1, \dots, T_n, \dots \in E'$  une suite bornée de formes linéaires continues  $\|T_n\|_{E'} \leq 1$ . Alors il existe une suite extraite  $(T_{\phi(k)})_k$  et  $T \in E'$  telles que :*

$$\forall x \in E, \quad T_{\phi(n)} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T(x). \quad (22)$$

Appliquons le lemme aux formes linéaires suivantes, continues sur l'espace séparable  $C^0(\mathbb{U})$  :

$$T_n : \begin{array}{l} C^0(\mathbb{U}) \longrightarrow \mathbb{C} \\ g \longmapsto \int_{\mathbb{U}} g(t) P_n(t) dt / 2\pi \end{array}. \quad (23)$$

Ainsi il existe une forme linéaire continue  $T : C^0(\mathbb{U}) \longrightarrow \mathbb{C}$  telle que, quitte à extraire dans la suite  $(T_n)$ ,

$$\forall f \in C^0(\mathbb{U}), \quad T_n f \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} T f. \quad (24)$$

La forme linéaire  $T$  hérite de certaines des propriétés des  $T_n$ .

1. Elle est positive, c'est à dire que si  $f \geq 0$  est une fonction continue sur  $\mathbb{U}$  alors  $Tf \geq 0$ .
2. L'image de la fonction constante de valeur unité est  $T(1) = 1$ .

En particulier,  $T$  définit une mesure de Radon positive  $\mu$  de masse totale 1. Ses coefficients de Fourier se calculent de la façon suivante :

$$a_k = \hat{P}_n(q^k) = \int_{\mathbb{U}} e^{-iq^k t} P_n(t) \frac{dt}{2\pi} \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{U}} e^{-iq^k t} d\mu(t) = \hat{\mu}(q^k), \quad (25)$$

ce qui assure que  $\mu$  est une mesure satisfaisant les conditions désirées.  $\square$

*Remarque 5.* Les ensembles  $\Lambda$  vérifiant la propriété (13) sont des *ensembles de Sidon*. On dispose alors d'un isomorphisme bicontinu  $C_{\Lambda}^0(\mathbb{U}) \simeq l^1(\Lambda)$  (où  $C_{\Lambda}^0$  est l'espace des fonctions continues dont le spectre est contenu dans  $\Lambda$ ) :

$$\begin{array}{c} C_{\Lambda}^0(\mathbb{U}) \longrightarrow l^1(\Lambda) \\ f \longmapsto \hat{f} \end{array} . \quad (26)$$

En particulier, toute fonction mesurable bornée dont le spectre est contenu dans  $\Lambda$  est continue. Remarquons enfin que le théorème de Banach-Steinhaus assure que si toute fonction continue de spectre contenu dans  $\Lambda$  a une série de Fourier absolument convergente alors  $\Lambda$  est un ensemble de Sidon.

*Remarque 6.* Les séries de Fourier  $\sum_k a_k e^{i\lambda_k t}$  vérifiant la condition  $\lambda_{k+1}/\lambda_k \geq q$  avec  $q > 1$  sont dites *lacunaires*. Elles ont de nombreuses propriétés particulières : entre autres, (voir [15] chapitre V, paragraphes 6 et 7, et chapitre VI, paragraphe 6)

- Si deux fonctions définies par des séries lacunaires coïncident sur une partie de  $\mathbb{U}$  de mesure non nulle, elles sont égales presque partout.
- Le théorème de Hadamard assure qu'une série entière lacunaire n'a aucun point régulier sur son cercle d'incertitude. Le développement sur la fonction de Weierstraß (plus bas) fournit un bon exemple de ce comportement.
- Dans le même esprit, le "high indices theorem" de Hardy et Littlewood (1926) assure que la condition  $a_n = o(\frac{1}{n})$  du théorème de Tauber (1897) sur les séries entières  $\sum_n a_n x^n$  peut être remplacée par une condition de lacunarité sur les coefficients.

*Preuve du lemme.* La séparabilité de  $E$  permet de fixer  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  une partie dense. Pour chaque  $k$ ,  $|T_n(x_k)| \leq 1$  et on peut fixer une extraction  $\phi_k \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  telle que  $(T_{\phi_k(n)}(x_k))_n$  converge dans  $\mathbb{C}$ . On pose alors (extraction diagonale)

$$\begin{cases} \phi(n) = \phi_1 \circ \dots \circ \phi_n(n) \\ y_k = \lim_{n \rightarrow +\infty} T_{\phi(n)}(x_k) \end{cases} . \quad (27)$$

Soit  $x \in E$ . Montrons la convergence de  $T_{\phi(n)}(x)$ . Soit  $q > p$  entiers et  $\epsilon > 0$ . Fixons  $k$  tel que  $\|x - x_k\| \leq \epsilon$ . Alors,

$$|T_{\phi(q)}(x) - T_{\phi(p)}(x)| \leq \|T_{\phi(q)} - T_{\phi(p)}\|_{E'} \|x - x_k\| + |T_{\phi(q)}(x_k) - T_{\phi(p)}(x_k)| \quad (28)$$

$$\leq 2\epsilon + |T_{\phi(q)}(x_k) - T_{\phi(p)}(x_k)| \leq 3\epsilon \quad (29)$$

dès que  $q > p \geq N$  avec  $N$  assez grand. Enfin, la continuité de  $T$  résulte de

$$|T_{\phi(n)}(x)| \leq \|T_{\phi(n)}\| \|x\| \leq \|x\|, \quad (30)$$

et donc  $|T_{\phi(n)}(x)| \rightarrow |T(x)| \leq \|x\|$ .  $\square$

### 3 Théorème d'Uchiyama

Le contenu de cette section est extrait de [4] chapitre V exercice 2 p. 135 pour l'essentiel et [10] chapitre 0 section IV pp. 28-29 pour les inégalités de Khintchine.

On note encore  $\mathbb{U} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  le cercle unité que l'on munit de la mesure  $dx/2\pi$  déduite de celle de Lebesgue.

**Théorème 7** (Uchiyama, 1965). *Soit  $N \geq 1$ . Il existe une partie  $A \subset \{1, 2, \dots, N\}$  telle que*

$$\text{Card}(A) \geq \frac{1}{8}N \quad \text{et} \quad \left\| \sum_{n \in A} e^{int} \right\|_{L^1(t \in \mathbb{U})} \geq \frac{1}{4}\sqrt{N}. \quad (31)$$

*Démonstration.* Pour montrer l'existence de  $A$ , nous allons utiliser un argument probabiliste. Soit  $\epsilon_1, \dots, \epsilon_N$  des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher<sup>4</sup>  $\mathcal{R}(1/2)$  sur un même espace de probabilité  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ . On regarde l'espérance suivante :

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \epsilon_n e^{int} \right\|_{L^1(t \in \mathbb{U})} = \int_{\Omega} \int_{\mathbb{U}} \left| \sum_{n=1}^N \epsilon_n(\omega) e^{int} \right| \frac{dt}{2\pi} d\mathbb{P}(\omega). \quad (32)$$

Le théorème de Fubini<sup>5</sup> permet l'interversion des intégrales<sup>6</sup> :

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \epsilon_n e^{int} \right\|_{L^1(t \in \mathbb{U})} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \int_{\Omega} \left| \sum_{n=1}^N \epsilon_n(\omega) e^{int} \right| d\mathbb{P}(\omega) dt. \quad (33)$$

Nous utilisons ensuite le lemme suivant :

**Lemme 8** (Inégalités de Khintchine). *Soit  $a_1, \dots, a_N \in \mathbb{C}$  et  $X = a_1\epsilon_1 + \dots + a_N\epsilon_N$ . Alors :*

1. Pour  $p \geq 2$  entier,  $\|X\|_{L^p(\Omega)} \leq \sqrt{\frac{p}{2}} \|X\|_{L^2(\Omega)}$ .
2. On a :  $\frac{1}{2} \|X\|_{L^2(\Omega)} \leq \|X\|_{L^1(\Omega)}$ .

Remettons la preuve de ce lemme à plus tard et montrons comment il nous permet de terminer la preuve. On a, pour  $t \in \mathbb{R}$ , en vertu du deuxième point du lemme et de l'indépendance des  $\epsilon_n$ ,

$$\mathbb{E} \left| \sum_{n=1}^N \epsilon_n(\omega) e^{int} \right| \geq \frac{1}{2} \mathbb{E} \left( \left| \sum_{n=1}^N \epsilon_n(\omega) e^{int} \right|^2 \right)^{1/2} \quad (34)$$

$$= \frac{1}{2} \left[ \mathbb{E} \left( \sum_{m,n} \epsilon_m \epsilon_n e^{i(n-m)t} \right) \right]^{1/2} = \frac{1}{2} \sqrt{N}. \quad (35)$$

4. C'est à dire que  $\epsilon_n = \pm 1$  presque sûrement.

5. Rappelons que le théorème de Fubini assure que toutes les fonctions intervenant dans (32) et (33) sont mesurables et que l'égalité (33) est valable pour tout représentant de  $|\sum_n \epsilon_n(\omega) e^{int}|$  dans  $L^1(\Omega \times \mathbb{U})$ . Par ailleurs, nous pouvons appliquer ce théorème puisque les mesures sur  $\Omega$  et  $\mathbb{U}$  sont toutes deux finies, et donc  $\sigma$ -finies.

6. Remarquons aussi que le théorème de transfert assure que l'intégrale sur  $\Omega$  est en fait une somme finie, ce qui nous permettrait de nous dispenser du théorème de Fubini. Cependant, pour utiliser une démarche plus facilement généralisable, nous poursuivons la démonstration en utilisant le théorème de Fubini.



Et donc,

$$\mathbb{E} \left\| \sum_{n=1}^N \epsilon_n e^{int} \right\|_{L^1(t \in \mathbb{U})} \geq \frac{1}{2} \sqrt{N}. \quad (36)$$

Il existe donc un  $\omega \in \Omega$  tel que

$$\left\| \sum_{n=1}^N \epsilon_n(\omega) e^{int} \right\|_{L^1(t \in \mathbb{U})} \geq \frac{1}{2} \sqrt{N}. \quad (37)$$

On pose alors  $a_n = \epsilon_n(\omega)$  et

$$B_+ = \{1 \leq n \leq N, a_n = 1\}, \quad B_- = \{1 \leq n \leq N, a_n = -1\}, \quad (38)$$

$$f_+(t) = \sum_{n \in B_+} e^{int}, \quad f_-(t) = \sum_{n \in B_-} e^{int}, \quad (39)$$

de sorte que  $\|f_+ - f_-\|_{L^1} \geq \frac{1}{2} \sqrt{N}$  et donc  $\|f_+\|_{L^1} \geq \frac{1}{4} \sqrt{N}$  ou  $\|f_-\|_{L^1} \geq \frac{1}{4} \sqrt{N}$ .

Soit  $A \in \{B_+, B_-\}$  choisi tel que

$$\left\| \sum_{n \in A} e^{int} \right\|_{L^1(t \in \mathbb{U})} \geq \frac{1}{4} \sqrt{N}. \quad (40)$$

Alors le cardinal de  $A$  s'obtient avec l'identité de Parseval :

$$\text{Card}(A) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in A} e^{int} \right|^2 dt, \quad (41)$$

et l'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit

$$\text{Card}(A) \geq \left( \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \sum_{n \in A} e^{int} \right| dt \right)^2 \geq \left( \frac{1}{4} \sqrt{N} \right)^2 = \frac{1}{8} N. \quad (42)$$

□

*Preuve du lemme.* **Étape 1 :** Commençons par montrer le premier point.

Écrivons  $p = 2q$  et commençons par supposer que les  $a_n$  sont tous réels.

La quantité  $|X|^p = X^p$  est alors la puissance d'une somme : nous pouvons abandonner toute subtilité et développer en utilisant la formule du multinôme.

$$\mathbb{E} \left[ \left( \sum_{n=1}^N a_n \epsilon_n \right)^p \right] = \mathbb{E} \left( \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha_1! \cdots \alpha_N!} a_1^{\alpha_1} \cdots a_N^{\alpha_N} \epsilon_1^{\alpha_1} \cdots \epsilon_N^{\alpha_N} \right), \quad (43)$$

où la somme est pris sur les multi-indices  $\alpha \in \mathbb{N}^N$  de longueur  $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_N = p$ . L'indépendance des  $\epsilon_n$  donne alors

$$\mathbb{E} (|X|^p) = \sum_{|\alpha|=p} \frac{p!}{\alpha_1! \cdots \alpha_N!} a_1^{\alpha_1} \cdots a_N^{\alpha_N} \mathbb{E}(\epsilon_1^{\alpha_1}) \cdots \mathbb{E}(\epsilon_N^{\alpha_N}). \quad (44)$$

Seuls les termes où tous les  $\alpha_n$  sont pairs contribuent de façon non triviale à la somme, ce qui nous permet d'écrire

$$\mathbb{E}(|X|^p) = \sum_{2|\beta|=p} \frac{(2q)!}{(2\beta_1)! \cdots (2\beta_N)!} a_1^{2\beta_1} \cdots a_N^{2\beta_N}. \quad (45)$$

Nous allons chercher à nous ramener à une formule du multinôme pour la puissance  $q$ . Tout d'abord,  $(2k)! \geq 2^k k!$  pour tout  $k \geq 0$  et donc

$$\mathbb{E}(|X|^p) \leq \frac{(2q)!}{q!2^q} \sum_{|\beta|=q} \frac{q!}{\beta_1! \cdots \beta_N!} (a_1^2)^{\beta_1} \cdots (a_N^2)^{\beta_N} = \frac{(2q)!}{q!2^q} (a_1^2 + \cdots + a_N^2)^q. \quad (46)$$

Il nous reste à majorer le terme  $\frac{(2q)!}{q!2^q}$ . Nous nous servons de l'inégalité suivante :

$$\frac{(2q)!}{q!} = (q+1) \cdots (2q) \leq (2q)^q = 2^q q^q \quad (47)$$

si bien que  $\frac{(2q)!}{2^q q!} \leq q^q$  et

$$\mathbb{E}(|X|^p) \leq q^q \|X\|_{L^2}^p, \quad (48)$$

$$\|X\|_{L^p} \leq \sqrt{\frac{p}{2}} \|X\|_{L^2}. \quad (49)$$

**Etape 2 :** On ne suppose plus que les  $a_n$  sont tous réels. On décompose alors  $X$  en partie réelle et partie imaginaire :  $X = A + iB$ . Alors,

$$\|X\|_{L^p} = \|A^2 + B^2\|_{L^{p/2}}^{1/2} \leq (\|A^2\|_{L^{p/2}} + \|B^2\|_{L^{p/2}})^{1/2} \quad (50)$$

$$= (\|A\|_{L^p}^2 + \|B\|_{L^p}^2)^{1/2} \quad (51)$$

Comme  $A$  et  $B$  sont des combinaisons à coefficients réels des  $\epsilon_n$ , nous pouvons leur appliquer l'inégalité (49).

$$\|X\|_{L^p} \leq \sqrt{\frac{p}{2}} (\|A\|_{L^2}^2 + \|B\|_{L^2}^2)^{1/2} = \sqrt{\frac{p}{2}} \|X\|_{L^2}. \quad (52)$$

**Etape 3 :** Deuxième inégalité. On se sert de la première inégalité dans le cas  $p = 4$ . On pose  $Y = |X|^{1/2}$  et alors

$$\|Y\|_{L^4} \leq \sqrt{2} \|Y\|_{L^2}, \quad (53)$$

$$\frac{1}{2} \|X\|_{L^2} \leq \|X\|_{L^1}. \quad (54)$$

□

*Remarque 9.* Les inégalités de Khintchine sont vraies pour tout exposant  $p \geq 2$ , mais avec une constante moins bonne que  $\sqrt{p/2}$ . Pour s'en assurer, il s'agit de prendre  $q \geq 1$  entier et  $0 \leq \theta \leq 1$  tels que  $p = 2q(1 - \theta) + (2q + 2)\theta$ . On utilise

ensuite l'inégalité de Hölder avec les exposants conjugués  $\frac{1}{\theta-1} + \frac{1}{(1-\theta)^{-1}} = 1$  pour se ramener au cas d'exposants entiers pairs :

$$\|X\|_{L^p}^p = \int_{\Omega} |X|^{2q(1-\theta)} |X|^{(2q+2)\theta} d\mathbb{P} \leq \left( \int_{\Omega} |X|^{2q+2} d\mathbb{P} \right)^{\theta} \left( \int_{\Omega} |X|^{2q} d\mathbb{P} \right)^{1-\theta} \quad (55)$$

$$= \|X\|_{L^{2q+2}}^{\theta(2q+2)} \|X\|_{L^{2q}}^{2q(1-\theta)}. \quad (56)$$

Quelques majorations rapides donnent alors

$$\|X\|_{L^p} \leq \sqrt{p} \|X\|_{L^2}. \quad (57)$$

*Remarque 10.* Les inégalités de Khintchine assurent que toutes les normes  $\|\cdot\|_{L^p}$  sont équivalentes sur le sous-espace de dimension infinie  $F = \text{Vect}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots\} \subset L^\infty(\Omega)$ . En fait, puisque les valuations 2-adiques des nombres réels  $0 \leq x \leq 1$  permettent de construire une telle suite de variables de Rademacher, un tel sous-espace existe dans  $L^\infty(0,1)$ .

*Remarque 11.* Indiquons en quoi le résultat d'Uchiyama est notable. Le noyau de Dirichlet  $D_N$  est connu pour avoir une norme  $L^1$  assez grande :  $\|D_N\|_{L^1} \geq Cte \log(N)$ . Ce mauvais comportement est en fait une caractéristique générale des sommes d'exponentielles : si  $\lambda_1 < \dots < \lambda_N$  sont des entiers alors on a également

$$\left\| \sum_{k=1}^N e^{i\lambda_k t} \right\|_{L^1(t \in \mathbb{U})} \geq Cte \log(N). \quad (58)$$

Ce résultat, conjecturé en 1948 par Littlewood, n'a été démontré qu'en 1981 par d'un coté Konyagin, et de l'autre McGegee, Pigno et Smith avec deux preuves différentes et difficiles (voir [4] chapitre IX pour l'histoire et une démonstration de la conjecture de Littlewood). Ce qu'indique le théorème d'Uchiyama est que l'on peut faire "encore pire" que  $\log(N)$  si l'on choisit bien les fréquences  $\lambda_n$ .

*Remarque 12.* En utilisant des méthodes très différentes, on peut montrer (voir [4] chapitre VIII, en particulier le corollaire 2.15 p. 225) qu'un exemple de partie  $A$  réalisant une inégalité du même type que celle du théorème d'Uchiyama est, si  $N = n^2$

$$\left\| \sum_{k^2 \leq N} e^{ik^2 t} \right\|_{L^1(t \in \mathbb{U})} \geq Cte N^{1/4}. \quad (59)$$

## 4 Théorème de la dimension de Tate

Le contenu de cette section provient de [13] pp. 43-47. Ici, toutes les représentations de groupes sont complexes et de dimensions finies.

**Théorème 13** (Tate). *Soit  $G$  un groupe fini et  $\hat{G}$  l'ensemble des représentations irréductibles de  $G$  (identifiées à isomorphismes de représentations près). Alors, si  $Z(G)$  est le centre de  $G$ ,*

$$\forall R \in \hat{G}, \quad \dim(R) \mid \frac{|G|}{|Z(G)|} \quad \text{dans } \mathbb{Z}. \quad (60)$$

*Démonstration.* Ce théorème est une extension du fait suivant, que nous montrerons à la fin de cette section :

**Lemme 14.** *Pour tout groupe fini  $G$  et  $R \in \hat{G}$ ,  $\dim(R) \mid |G|$ .*

Nous allons appliquer ce lemme à un groupe et une représentation bien choisis. Fixons  $R \in \hat{G}$  et notons  $\rho_R : G \rightarrow GL(R)$  et  $\chi_R : G \rightarrow \mathbb{C}$  le morphisme et le caractère associés.

**Etape 1 :** Soit  $n \geq 2$ . On considère la représentation suivante de  $G^n$  :

$$\rho : \begin{array}{c} G^n \longrightarrow GL(\otimes^n R) \\ (g_1, \dots, g_n) \longmapsto \rho_R(g_1) \otimes \dots \otimes \rho_R(g_n) \end{array}, \quad (61)$$

où  $\otimes^n R$  est le produit tensoriel  $R \otimes \dots \otimes R$  ( $n$  fois). Alors  $\otimes^n R$  muni du morphisme  $\rho$  est une représentation irréductible de  $G^n$ . En effet, la norme  $L^2(G^n)$  du caractère  $\chi$  associé est, puisque le caractère d'un produit tensoriel est le produit des caractères,

$$\|\chi\|_{L^2} = \frac{1}{|G|^n} \sum_{(g_1, \dots, g_n) \in G^n} |\chi(g_1, \dots, g_n)|^2 \quad (62)$$

$$= \prod_{k=1}^n \left( \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\chi_R(g)|^2 \right) = 1. \quad (63)$$

**Etape 2 :** Soit  $n \in Z(G)$ . Alors  $\rho_R(n) : R \rightarrow R$  est un automorphisme de la représentation  $R$ . En effet,

$$\forall (g, x) \in G \times R, \quad g.(n.x) = (gn).x = (ng).x = n.(g.x), \quad (64)$$

où l'on a noté  $g.x = \rho_R(g)(x)$ . Le lemme de Schur assure que  $\rho_R(n) = \lambda(n)\text{id}_R$ , où  $\lambda(n) \in \mathbb{C}^\times$ . On définit ainsi un morphisme de groupes  $\lambda : Z(G) \rightarrow \mathbb{C}^\times$ .

**Etape 3 :** On pose

$$T_n = \left\{ (g_1, \dots, g_n) \in Z(G)^n, \prod_{k=1}^n g_k = 1 \right\}. \quad (65)$$

C'est un sous-groupe distingué  $T_n \triangleleft G^n$ . Par ailleurs, si  $(g_1, \dots, g_n) \in T_n$ ,

$$\rho(g_1, \dots, g_n) = \bigotimes_{k=1}^n \lambda(g_k)\text{id}_R = \lambda \left( \prod_{k=1}^n g_k \right) \text{id}_{\otimes^n R} = \text{id}_{\otimes^n R}. \quad (66)$$

On en déduit un morphisme quotient  $\tilde{\rho}$  qui définit une représentation

$$\tilde{\rho} : \frac{G^n}{T_n} \longrightarrow GL(\otimes^n R). \quad (67)$$

Cette représentation est toujours irréductible puisque si  $W \subset \otimes^n R$  est une sous  $G^n/T_n$ -représentation alors  $W$  est aussi une sous  $G^n$ -représentation. Le Lemme 14 assure alors que

$$\dim(\otimes^n R) = \dim(R)^n \mid \left| \frac{G^n}{T_n} \right| = \frac{|G|^n}{|Z(G)|^{n-1}} \quad \text{dans } \mathbb{Z}. \quad (68)$$

Cette dernière égalité découle du fait que l'on dispose d'une bijection  $Z(G)^{n-1} \rightarrow T_n$  donnée par :  $(g_1, \dots, g_{n-1}) \mapsto (g_1, \dots, g_{n-1}, g_1^{-1} \cdots g_{n-1}^{-1})$ .

**Etape 4 :** Nous avons montré que

$$\forall n \geq 2, \quad \dim(R) \mid \frac{|G|^n}{|Z(G)|^{n-1}} \quad \text{dans } \mathbb{Z}. \quad (69)$$

En outre, nous savons déjà que  $\dim(R) \mid |G|$ . Posons  $a = \frac{|G|}{\dim(R)}$  et  $b = |Z(G)|$  et montrons que  $b \mid a$ .

Quitte à décomposer  $a$  et  $b$  en facteurs premiers, on peut supposer que  $a = p^r$  et  $b = p^s$  où  $p \geq 2$  est un nombre premier. La relation (69) assure alors que  $p^{nr-(n-1)s} \in \mathbb{N}$  pour tout nombre entier  $n \geq 2$ , d'où  $n(r-s) + s \geq 0$  pour  $n \geq 2$  et  $r \geq s$ , ce qui conclut la preuve.  $\square$

*Preuve du lemme.* La preuve du lemme repose sur quelques propriétés des entiers algébriques sur  $\mathbb{C}$  : c'est l'ensemble  $A$  des nombres complexes racines d'un polynôme unitaire à coefficients entiers. Ces nombres bénéficient des propriétés suivantes : (voir [13] aux pages mentionnées plus haut ou à peu près n'importe quel ouvrage d'algèbre pour les démonstrations de ces points)

1. L'ensemble  $A$  est un sous-anneau de  $\mathbb{C}$ .
2. Tout polynôme  $P \in A[X]$  a ses racines complexes dans  $A$ .
3. On a  $A \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ .

Nous allons construire une matrice  $M$  à coefficients dans  $A$  dont  $|G|/\dim(R)$  est une valeur propre. Le théorème de Cayley-Hamilton appliqué au polynôme caractéristique de  $M$  donnera alors  $|G|/\dim(R) \in A \cap \mathbb{Q} = \mathbb{Z}$ .

Plus précisément, nous allons montrer que  $\chi_R * \chi_R = \frac{|G|}{\dim(R)} \chi_R$ , soit encore

$$\forall h \in G, \quad \sum_{g \in G} \chi_R(hg^{-1}) \chi_R(g) = \frac{|G|}{\dim(R)} \chi_R(h), \quad (70)$$

ce qui s'écrit  $Bx = \frac{|G|}{\dim(R)} x$  avec  $B_{hg} = \chi_R(hg^{-1})$  et  $x = (\chi_R(g))_{g \in G}$ . La matrice  $B$  est bien à coefficients dans l'anneau  $A$  puisque les  $\chi_R(hg^{-1})$  sont des sommes des valeurs propres des  $\rho_R(hg^{-1})$ , ces valeurs propres étant racines du polynôme annulateur unitaire  $X^{|G|} - 1 \in \mathbb{Z}[X]$ .

Etablissons que  $\chi_R * \chi_R = \frac{|G|}{\dim(R)} \chi_R$ . Pour ce faire, il est commode de prendre la transformée de Fourier des deux membres. Celle-ci définit un isomorphisme de  $\mathbb{C}$ -algèbres<sup>7</sup>

$$\mathcal{F} : \begin{array}{l} (\mathbb{C}[G], *) \longrightarrow \prod_{s \in \hat{G}} \mathcal{L}(S) \\ f \longmapsto \left( \sum_{g \in G} f(g) \rho_S(g) \right)_{s \in \hat{G}} \end{array}, \quad (71)$$

7. On note  $\mathbb{C}[G]$  la  $\mathbb{C}$ -algèbre des fonctions à valeurs complexes sur  $G$  munie du produit de convolution  $*$ .

de sorte que  $\mathcal{F}[\chi_R * \chi_R] = \mathcal{F}[\chi_R]^2$ . Nous calculons donc  $\mathcal{F}[\chi_R]$ . Soit  $S \in \hat{G}$ . Alors, comme  $\chi_R \in \mathbb{C}[G]$  est une fonction centrale,  $\sum_{g \in G} \chi_R(g) \rho_S(g)$  est un automorphisme de la représentation  $S$ . En effet, si  $h \in G$ ,

$$\rho_S(h) \sum_{g \in G} \chi_R(g) \rho_S(g) = \sum_{g \in G} \chi_R(g) \rho_S(hg) = \sum_{g \in G} \chi_R(hgh^{-1}) \rho_S(hgh^{-1}) \rho_S(h) \quad (72)$$

$$= \left( \sum_{g \in G} \chi_R(hgh^{-1}) \rho_S(hgh^{-1}) \right) \rho_S(h) \quad (73)$$

$$= \left( \sum_{g \in G} \chi_R(g) \rho_S(g) \right) \rho_S(h). \quad (74)$$

Le lemme de Schur assure alors que

$$\sum_{g \in G} \chi_R(g) \rho_S(g) = \frac{1}{\dim(S)} \operatorname{Tr} \left[ \sum_{g \in G} \chi_R(g) \rho_S(g) \right] \operatorname{id}_S \quad (75)$$

$$= \frac{|G|}{\dim(S)} \langle \chi_{S^*} | \chi_R \rangle_{L^2(G)} \operatorname{id}_S = \frac{|G|}{\dim(S)} \mathbb{1}_{R \simeq S^*} \operatorname{id}_S, \quad (76)$$

où  $S^*$  est la représentation duale de  $S$  et  $\mathbb{1}_{R \simeq S^*}$  vaut 1 si les représentations  $R$  et  $S^*$  sont isomorphes et 0 sinon. On se souviendra que la représentation duale  $S^*$  est également une représentation irréductible puisque  $\|\chi_S\|_{L^2(G)}^2 = \|\chi_{S^*}\|_{L^2(G)}^2 = 1$ .

On déduit de ceci

$$\mathcal{F}[\chi_R * \chi_R] = \frac{|G|}{\dim(R)} \mathcal{F}[\chi_R] \quad (77)$$

et le résultat.  $\square$

## 5 Groupe orthogonal d'un plan quadratique

Soit  $K$  un corps de caractéristique  $\operatorname{Car}(K) \neq 2$  et  $(E, q)$  un plan quadratique non dégénéré sur  $K$ . Notons  $f : E \times E \rightarrow K$  la forme polaire associée à  $q$ .

On se propose de déterminer  $O(q)$  le groupe des isométries de  $E$  et  $SO(q)$  le groupe des isométries de  $E$  de déterminant 1.

**Premier cas :** la forme quadratique  $q$  est isotrope.

Munissons nous d'une base hyperbolique  $B = (e_1, e_2)$  de  $E$ , c'est à dire telle que la matrice de  $q$  dans cette base soit

$$M_B(q) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (78)$$

Soit  $g \in O(q)$ . Alors

$$\begin{cases} q(g(e_1)) = q(e_1) = 0 \\ q(g(e_2)) = q(e_2) = 0 \end{cases}, \quad (79)$$

et donc nécessairement

$$\begin{cases} \text{ou bien } g(e_1) \in K^\times e_1 \text{ et } g(e_2) \in K^\times e_2, \\ \text{ou bien } g(e_1) \in K^\times e_2 \text{ et } g(e_2) \in K^\times e_1. \end{cases} \quad (80)$$

Dans le premier cas, on peut fixer  $\lambda, \mu \in K^\times$  tels que  $g(e_1) = \lambda e_1$  et  $g(e_2) = \mu e_2$ , et puisque  $g$  est une isométrie,  $f(g(e_1), g(e_2)) = \lambda\mu f(e_1, e_2) = f(e_1, e_2) = 1$  et donc  $\lambda\mu = 1$ . La matrice de  $g$  dans la base  $B$  est

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}. \quad (81)$$

Dans le deuxième cas, on considère  $h \in O(q)$  dont la matrice dans la base  $B$  est

$$M_B(h) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (82)$$

Alors  $h \circ g(e_1) \in K^\times e_1$  et on peut fixer  $\lambda \in K^\times$  tel que

$$M_B(g) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}. \quad (83)$$

On en déduit les groupes  $O(q)$  et  $SO(q)$  :

$$O(q) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \in K^\times \right\} \sqcup \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \lambda^{-1} \\ \lambda & 0 \end{pmatrix}, \lambda \in K^\times \right\}. \quad (84)$$

$$SO(q) = \left\{ \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \lambda \in K^\times \right\} \simeq K^\times. \quad (85)$$

Concluons l'étude de ce premier cas en remarquant que le groupe  $O(q)$  a une structure de produit semi-direct : si  $\langle h \rangle$  est le groupe engendré par l'isométrie de (82), on a :

$$\langle h \rangle \cap SO(q) = \{\text{id}_E\}, \quad SO(q) \triangleleft O(q), \quad \langle h \rangle \cdot SO(q) = O(q). \quad (86)$$

et donc  $O(q) = SO(q) \rtimes \langle h \rangle \simeq K^\times \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  où  $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(K^\times)$  est le morphisme de groupes tel que  $\alpha(1) = (: \lambda \mapsto \lambda^{-1})$ .

**Deuxième cas :** la forme quadratique  $q$  est anisotrope.

Munissons-nous d'un discriminant  $-\delta \in K^\times$  de  $q$ . Le théorème d'existence des bases  $q$ -orthogonales permet de supposer que  $E = K^2$ , que  $q(x, y) = ax^2 + by^2$  et que  $ab = -c^2\delta$  avec  $a, b, c \in K^\times$ . Quitte à poser  $q'(x, y) = a^{-1}q(x, \frac{a}{c}y)$ , on peut encore supposer que  $q(x, y) = x^2 - \delta y^2$ .

On se munit d'un corps de rupture de  $X^2 - \delta \in K[X]$ . Posons

$$L = \frac{K[X]}{(X^2 - \delta)}. \quad (87)$$

On note  $\sqrt{\delta} = \bar{X} \in L$  si bien que  $L = K[\sqrt{\delta}]$ . Pour  $z = x + y\sqrt{\delta} \in L$ , on pose

$$\bar{z} = x - y\sqrt{\delta}, \quad N(z) = z\bar{z} = x^2 - \delta y^2. \quad (88)$$

Les  $K$ -formes quadratiques  $q : E \rightarrow K$  et  $N : K[\sqrt{\delta}] \rightarrow K$  sont isométriques si bien que nous pouvons nous contenter de mener l'étude de  $N$ .

L'anisotropie de la forme quadratique  $q$  se traduit de la manière suivante : pour tout  $z \in L$ , si  $z \neq 0$  alors  $N(z) \neq 0$ . Comme  $N$  est de plus multiplicative (c'est à dire que  $N(ab) = N(a)N(b)$  pour  $a, b \in L$ ), elle définit un morphisme de groupes  $N : L^\times \rightarrow K^\times$ . Soit  $\mathbb{U}_L \subset L^\times$  le noyau de ce morphisme.

Alors on dispose d'un morphisme de groupes

$$\phi : \begin{array}{c} \mathbb{U}_L \rightarrow SO(q) \\ \lambda \mapsto \left[ \begin{array}{c} L \rightarrow L \\ z \mapsto \lambda z \end{array} \right] \end{array}. \quad (89)$$

Ce morphisme est injectif puisque  $\lambda = \phi(\lambda)(1_L)$ . Montrons qu'il est également surjectif. Soit  $g \in SO(q)$  et  $\lambda := g(1_L) \in \mathbb{U}_L$ . Les vecteurs  $g(\sqrt{\delta})$  et  $\phi(\lambda)(\sqrt{\delta})$  sont  $K$ -colinéaires dans  $L$  puisqu'ils sont tous deux  $N$ -orthogonaux à  $\lambda$ , et ils sont nécessairement égaux puisque  $\det(g) = \det(\phi(\lambda)) = 1$ . On en déduit que les deux endomorphismes de  $L$  coïncident sur une base et que  $g = \phi(\lambda) \in \text{Im}(\phi)$ . On a bien  $SO(q) \simeq \mathbb{U}_L$ .

Soit  $h : L \rightarrow L$  l'endomorphisme associé à la conjugaison  $h(z) = \bar{z}$ . On dispose d'une bijection

$$\psi : \begin{array}{c} \mathbb{U}_L \rightarrow O(q) - SO(q) \\ \lambda \mapsto \left[ \begin{array}{c} \phi(\lambda) \circ h : L \rightarrow L \\ z \mapsto \lambda \bar{z} \end{array} \right] \end{array}. \quad (90)$$

Ces deux applications déterminent entièrement les groupes  $O(q)$  et  $SO(q)$ .

Concluons comme avant en montrant que le groupe  $O(q)$  a une structure de produit semi-direct. On a :

$$\langle h \rangle \cap SO(q) = \{\text{id}_L\}, \quad SO(q) \triangleleft O(q), \quad \langle h \rangle . SO(q) = O(q). \quad (91)$$

Et donc  $O(q) = SO(q) \rtimes \langle h \rangle \simeq \mathbb{U}_L \rtimes_\alpha \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$  où  $\alpha : \mathbb{Z}/2\mathbb{Z} \rightarrow \text{Aut}(\mathbb{U}_L)$  est le morphisme de groupes tel que  $\alpha(1) = (: \lambda \mapsto \bar{\lambda})$ .

*Remarque 15.* Il résulte en particulier que le groupe  $SO(q)$  est *toujours* commutatif et que le groupe  $O(q)$  est *toujours* résoluble *via* la suite  $\{\text{id}_E\} \subset SO(q) \subset O(q)$ .

## 6 Théorème de Springer

Soit  $K$  un corps de caractéristique  $\text{Car}(K) \neq 2$  et  $K \subset L$  une extension. Si  $q : K^n \rightarrow K$  est une forme quadratique, on note  $q_L : L^n \rightarrow L$  la forme



quadratique étendue<sup>8</sup>, de même matrice dans la base canonique *via* l'injection  $M_n(K) \subset M_n(L)$ .

**Théorème 16** (Springer). *Soit  $q : K^n \rightarrow K$  une forme quadratique anisotrope. Supposons l'extension  $L/K$  finie de degré impair. Alors la forme quadratique  $q_L : L^n \rightarrow L$  est également anisotrope.*

*Démonstration.* On raisonne par l'absurde : supposons le théorème faux en vue d'obtenir une contradiction. Parmi tous les  $d \geq 3$  impairs tels qu'il existe une extension et une forme quadratique niant l'énoncé, choisissons parmi ces degrés  $d \geq 3$  minimal. Il existe alors une extension  $L/K$  de degré  $d$  et une forme quadratique anisotrope  $q : K^n \rightarrow K$  telle que la forme étendue  $q_L$  soit isotrope.

**Etape 1 :** Il n'existe pas d'extension intermédiaire stricte  $K \subsetneq L_1 \subsetneq L$ .

En effet, dans le cas contraire les extensions  $L_1/K$  et  $L/L_1$  sont de degrés impairs en vertu du théorème de la base télescopique :  $[L : K] = [L : L_1][L_1 : K]$  est impair. Alors,

- La forme quadratique  $q_{L_1}$  est anisotrope puisque l'extension  $L_1/K$  est de degré impair  $[L_1 : K] < d$ .
- La forme quadratique  $q_L = (q_{L_1})_L$  est également anisotrope puisque l'extension  $L/L_1$  est de degré impair  $[L : L_1] < d$ , ce qui est absurde.

**Etape 2 :** L'extension  $L$  est isomorphe à une extension quotient  $K[X]/(P)$ .

Soit  $x \in L - K$  et  $P \in K[X]$  son polynôme minimal. On a alors une tour d'extensions

$$K \subsetneq \frac{K[X]}{(P)} \simeq K[x] \subset L. \quad (92)$$

Chacune de ces extensions est de degré impair puisque le théorème de la base télescopique fournit

$$[L : K] = \left[ L : \frac{K[X]}{(P)} \right] \left[ \frac{K[X]}{(P)} : K \right]. \quad (93)$$

Le point précédent force alors  $L = K[x] \simeq K[X]/(P)$ .

**Etape 3 :** Le théorème d'existence des bases  $q$ -orthogonales permet de supposer que  $q$  est de la forme  $q(x_1, \dots, x_n) = a_1x_1^2 + \dots + a_nx_n^2$  avec  $a_1, \dots, a_n \in K^\times$ . Puisque  $q_L$  est supposée isotrope, il existe des polynômes  $P_1, \dots, P_n \in K[X]$  tels que

$$\begin{cases} P \mid a_1P_1^2 + \dots + a_nP_n^2 := Q & \text{dans } K[X], \\ \forall 1 \leq k \leq n, \quad \deg(P_k) < d. \end{cases} \quad (94)$$

**Etape 4 :** Soit  $D$  un diviseur premier de  $Q$  distinct de  $P$  et de degré impair. Alors la forme quadratique  $q$  étendue à  $L_1 := K[X]/(D)$  est annulée

8. Un autre moyen d'étendre une forme quadratique  $q : E \rightarrow K$  est de considérer le produit tensoriel de  $K$ -espaces vectoriels  $E' = L \otimes_K E$  qui est naturellement muni d'une structure de  $L$ -espace vectoriel. On pose alors  $q'(\lambda \otimes x) = \lambda^2 q(x) \in L$ .

par  $((P_1 \bmod D), \dots, (P_n \bmod D)) \in L_1^n$ . Par ailleurs,  $L_1/K$  est une extension de degré impair  $[L_1 : K] = \deg(D)$  et ce degré est strictement inférieur à  $d$ , comme  $DP \mid Q$  et donc  $\deg(D) + d \leq \deg(Q) \leq 2(d-1)$ .

On en déduit que  $q_{L_1}$  est anisotrope et donc que  $P_k = 0 \bmod D$  pour  $1 \leq k \leq n$ .

Quitte à prendre  $\tilde{P}_1 = P_1/D, \dots, \tilde{P}_n = P_n/D$  et à réitérer l'opération pour tous les diviseurs de  $Q$  distincts de  $P$  et de degrés impairs, on peut supposer qu'il n'existe pas de tel diviseur.

**Etape 5 :** Le polynôme  $Q$  est de degré impair.

Soit  $Q = P^\alpha R_1^{\beta_1} \cdots R_p^{\beta_p}$  une décomposition de  $Q$  en diviseurs premiers de  $K[X]$ . Le point précédent nous permet de supposer que tous les  $R_k$  sont de degrés pairs. Par ailleurs,  $\alpha d = \deg(P^\alpha) \leq \deg(Q) \leq 2(d-1)$  et donc  $\alpha = 1$ .

On en déduit l'imparité de  $\deg(Q)$ ,

$$\deg(Q) = d + \beta_1 \deg(R_1) + \cdots + \beta_p \deg(R_p) \quad \text{est impair.} \quad (95)$$

**Etape 6 :** Le polynôme  $Q$  est de degré pair, ce qui est absurde.

Soit  $p = \max_k \deg(P_k)$  et  $x_k \in K$  le coefficient de  $X^p$  dans  $P_k$ . Alors  $\deg(Q) \leq 2p$  et le coefficient de  $X^{2p}$  dans  $Q$  est

$$a_1 x_1^2 + \cdots + a_n x_n^2 = q(x_1, \dots, x_n), \quad (96)$$

et ce coefficient est non nul puisque  $q$  est anisotrope sur  $K$  et que les  $x_k$  sont non tous nuls. On en déduit que  $\deg(Q) = 2p$ .

□

*Remarque 17.* Le résultat est faux pour les extensions de degrés pairs, comme le montre l'exemple de  $\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$  et  $q(x, y) = x^2 + y^2$ .

*Remarque 18.* Le théorème a une traduction en termes de groupes de Witt : si  $L/K$  est une extension finie de degré impair alors le morphisme  $W(K) \rightarrow W(L)$  induit sur les groupes de Witt est une injection.

## 7 Dérivées faibles des fonctions lipschitziennes

Au cours de l'année de préparation à l'agrégation, certains murmuraient contre les espaces  $L^\infty$ , sous-entendant qu'ils ne "servent à rien", puisque l'on ne se servirait en "pratique" de la norme uniforme  $\|\cdot\|_{L^\infty}$  que sur des espaces de fonctions continues.

C'est bien-sûr faux. Et, dans une tentative de rendre justice à  $L^\infty$  (et ce malgré le fait que ce respectable espace de Banach n'ait nul besoin de mon aide

maladroite<sup>9</sup>, puisqu'il sait, lui, toute la valeur et l'utilité qu'il a), j'ai ajouté ce développement à ma liste...

**Théorème 19.** *Soit  $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  une fonction continue et  $f'$  sa dérivée faible (c'est à dire au sens des distributions). Alors les conditions suivantes sont équivalentes :*

1. *La dérivée de  $f$  est une fonction bornée  $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ .*
2. *La fonction  $f$  est lipschitzienne.*

*Démonstration.* Commençons par supposer que  $f$  est lipschitzienne de constante de Lipschitz  $K > 0$ . Munissons-nous de  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$  et de  $h \neq 0$ .

D'une part, un changement de variables donne

$$\left\langle \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \phi(x) \right\rangle = \int \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \phi(x) dx = - \int f(x) \frac{\phi(x+h) - \phi(x)}{h} dx \quad (97)$$

$$\xrightarrow{h \rightarrow 0} - \int f(x), \phi'(x) dx = \langle f'(x), \phi(x) \rangle. \quad (98)$$

D'autre part, on a

$$\left| \left\langle \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \phi(x) \right\rangle \right| \leq \int \left| \frac{f(x+h) - f(x)}{h} \phi(x) \right| dx \leq K \|\phi\|_{L^1}, \quad (99)$$

et donc, en faisant  $h \rightarrow 0$ ,

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad |\langle f', \phi \rangle| \leq K \|\phi\|_{L^1}. \quad (100)$$

Puisque  $\mathcal{D}(\mathbb{R})$  est dense dans  $L^1(\mathbb{R})$ , la distribution  $f'$  se prolonge<sup>10</sup> en une forme linéaire continue sur  $L^1(\mathbb{R})$ . Le théorème de représentation (de Riesz) des formes linéaires sur ces espaces assure l'existence d'une fonction bornée  $g \in L^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\|g\|_{L^\infty} \leq K$  et

$$\forall \phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}), \quad |\langle f', \phi \rangle| = \langle g, \phi \rangle. \quad (101)$$

et donc  $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$ .

Réciproquement, supposons que  $f' \in L^\infty(\mathbb{R})$  et montrons que  $f$  est lipschitzienne. Plus précisément, nous allons montrer que, pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$f(x) = Cte + \int_0^x f'(t) dt. \quad (102)$$

Pour faire cela, nous allons montrer l'égalité des dérivées distributionnelles des deux membres. Soit donc  $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$ . On a :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} \int_0^x f'(t) dt, \phi(x) \right\rangle &= - \left\langle \int_0^x f'(t) dt, \phi'(x) \right\rangle \\ &= - \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{t \geq 0} f'(t) \phi'(x) \mathbb{1}_{0 \leq t \leq x} dt dx + \int_{x \in \mathbb{R}} \int_{t < 0} f'(t) \phi'(x) \mathbb{1}_{x \leq t \leq 0} dt dx. \end{aligned} \quad (103)$$

9. Travailler dans l'espace  $L^\infty$  est absolument indispensable dans, par exemple, la théorie des ondes de choc dans les équations de conservation scalaires. Pour plus, on pourra consulter le chapitre 11 de [8] (pp. 609-658).

10. Ceci se fait en vertu du théorème de prolongement des applications uniformément continues que l'on peut appliquer puisque les formes linéaires sont des applications uniformément continues à valeurs dans le corps des scalaires, qui est complet.

Le théorème de Fubini donne alors :

$$\begin{aligned} \left\langle \frac{d}{dx} \int_0^x f'(t) dt, \phi(x) \right\rangle &= - \int_{t \geq 0} f'(t) \int_{x=t}^{+\infty} \phi'(x) dx dt + \int_{t < 0} f'(t) \int_{x=-\infty}^t \phi'(x) dx dt \\ &= \int_{t \in \mathbb{R}} f'(t) \phi(t) dt = \langle f', \phi \rangle. \end{aligned} \quad (104)$$

Comme les deux fonctions de (102) sont continues, on a

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt. \quad (105)$$

On en déduit que  $f$  est  $\|f'\|_{L^\infty}$ -lipschitzienne :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad |f(x) - f(y)| = \left| \int_y^x f'(t) dt \right| \leq \|f'\|_{L^\infty} |x - y|. \quad (106)$$

□

*Remarque 20.* Un théorème de Rademacher affirme que toute fonction lipschitzienne est dérivable en presque chaque point. En fait, de ce que nous avons déjà montré au théorème de Rademacher, il n'y a qu'un (gros) pas : montrer la dérivabilité presque partout de

$$f(x) = f(0) + \int_0^x f'(t) dt. \quad (107)$$

Celle-ci résulte du théorème de différentiation de Lebesgue ([11] théorème 7.10. chapitre 7 p. 174), dont la démonstration est plus longue.

*Remarque 21.* Dans le sens  $2. \Rightarrow 1.$  nous avons montré que  $\|f'\|_{L^\infty} \leq K$  pour toute constante de Lipschitz  $K$  de  $f$ . Et le sens réciproque assure que  $\|f'\|_{L^\infty}$  est une constante de Lipschitz de  $f$ . On en déduit que la meilleure constante de Lipschitz de  $f$  est  $\|f'\|_{L^\infty}$ . Reformulons : si l'on munit l'espace  $Lip(\mathbb{R})$  des fonctions lipschitziennes de la norme

$$\forall f \in Lip(\mathbb{R}), \quad \|f\|_{Lip} := |f(0)| + \sup_{x \neq y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right|, \quad (108)$$

alors on dispose d'un isomorphisme isométrique

$$\begin{aligned} Lip(\mathbb{R}) &\longrightarrow \mathbb{C} \times L^\infty(\mathbb{R}) \\ : \quad f &\longmapsto (f(0), f') \end{aligned} \quad (109)$$

## 8 Une majoration pour les partitions d'entiers

Le contenu de cette section vient du très excellent cours de Denis Choimet, donné au *Lycée du Parc* dans l'année 2014-2015.

Pour  $n \geq 1$ , on note  $p(n)$  le nombre de moyens d'écrire  $n$  comme somme d'entiers positifs non nuls. Par exemple,

$$5 = 1+1+1+1+1 = 2+1+1+1 = 2+2+1 = 3+1+1 = 3+2 = 4+1 = 5 \quad (110)$$

et donc  $p(5) = 7$ . Il est possible de calculer explicitement chaque  $p(n)$  à l'aide de formules de récurrence, mais il est extrêmement difficile de donner une formule close pour  $p(n)$  en fonction de  $n$ . Ici, nous allons utiliser un argument de séries entières pour donner une majoration non triviale de  $p(n)$ .

**Théorème 22.** *On a :*

$$\forall n \geq 1, \quad p(n) \leq \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right). \quad (111)$$

Pour établir ce théorème, nous allons nous intéresser à la série génératrice des  $p(n)$ . Posons  $p(0) = 1$  et

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n \leq +\infty \quad (112)$$

pour  $x \in \mathbb{R}_+$ . Le calcul de la série génératrice  $F$  a été fait par Euler :

**Théorème 23** (Euler). *Pour  $0 \leq x < 1$ , on a*

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} < +\infty. \quad (113)$$

*Preuve du théorème d'Euler.* Soit  $N \geq 1$  et  $0 \leq x < 1$  fixé. On a :

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k} = \prod_{k=1}^N \left( \sum_{m=0}^{\infty} x^{mk} \right) \quad (114)$$

et, en faisant le produit de Cauchy de ces  $N$  séries entières convergentes, on obtient

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n)x^n, \quad (115)$$

où  $p_N(n)$  est le nombre de partitions de  $n$  dont les "atomes" sont dans  $\{1, \dots, N\}$  :

$$p_N(n) = \text{Card} \left\{ (m_1, \dots, m_N) \in \mathbb{N}^N, \quad \sum_{k=1}^N km_k = n \right\}. \quad (116)$$

Bien entendu,  $p_N(n) \nearrow p(n)$  lorsque  $N \rightarrow +\infty$  si bien que le théorème de convergence monotone assure que

$$\prod_{k=1}^N \frac{1}{1-x^k} = \sum_{n=0}^{\infty} p_N(n)x^n \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n, \quad (117)$$

et donc

$$\sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k} \quad \text{dans } \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}. \quad (118)$$

Mais ce produit est convergent dès que  $|x| < 1$  (son logarithme est une série absolument convergente). On en déduit la finitude de la série pour  $x < 1$ .  $\square$

Occupons-nous à majorer la fonction  $F$ . Le plus naturel est de prendre le logarithme de la relation d'Euler pour se ramener à un problème de séries. Soit  $0 \leq x < 1$  fixé.

$$\log F(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \log(1-x^k) = \sum_{k \geq 1} \sum_{m \geq 1} \frac{x^{km}}{m}. \quad (119)$$

Permutons ces deux sommes à l'aide du théorème de Fubini-Tonelli.

$$\log F(x) = \sum_{m \geq 1} \sum_{k \geq 1} \frac{x^{km}}{m} = \sum_{m \geq 1} \frac{1}{m} \frac{x^m}{1-x^m}. \quad (120)$$

Pour majorer ceci, nous comparons les termes  $1-x^m$  à la somme partielle d'une série géométrique finie :

$$1-x^m = (1-x) \sum_{j=0}^{m-1} x^j \geq mx^{m-1}(1-x), \quad (121)$$

et donc

$$\log F(x) \leq \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{m^2} \frac{x}{1-x} = \frac{\pi^2}{6} \frac{x}{1-x}, \quad (122)$$

$$\forall x \in [0, 1[, \quad F(x) \leq \exp\left(\frac{\pi^2}{6} \frac{x}{1-x}\right). \quad (123)$$

Pour obtenir une majoration de  $p(n)$ , nous procédons de manière aussi brutale que terriblement efficace : nous majorons le terme isolé  $p(n)x^n$  par l'ensemble de la série définissant  $F$  :

$$p(n)x^n \leq F(x) \leq \exp\left(\frac{\pi^2}{6} \frac{x}{1-x}\right). \quad (124)$$

Alors, en posant  $x = e^{-t}$  avec  $t > 0$ ,

$$p(n) \leq \exp\left(nt + \frac{\pi^2}{6} \frac{e^{-t}}{1-e^{-t}}\right) = \exp\left(nt + \frac{\pi^2}{6} \frac{1}{e^t - 1}\right). \quad (125)$$

L'inégalité de convexité  $e^t - 1 \geq t$  donne alors

$$\forall t > 0, \quad p(n) \leq \exp\left(nt + \frac{\pi^2}{6t}\right), \quad (126)$$

et il nous reste à optimiser  $t$  pour obtenir la meilleure majoration possible. Le choix optimal est  $t = \pi\sqrt{\frac{1}{6n}}$ , ce qui donne

$$\forall n \geq 1, \quad p(n) \leq \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right). \quad (127)$$

*Remarque 24.* Ce sont Hardy et Ramanujan qui ont, les premiers, trouvé un équivalent de  $p(n)$ . Celui-ci est remarquablement proche de la majoration que nous avons démontrée :

$$p(n) \sim \frac{1}{4n\sqrt{3}} \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2n}{3}}\right). \quad (128)$$

Mais l'obtention de cette approximation ne peut se faire au moyen des techniques élémentaires que nous avons employé ici. Nous nous sommes contentés d'évaluer  $\log F(x)$ , ce qui amène à des estimations bien moins précises que si nous avons étudié  $F$  directement. Cette étude directe, Hardy et Ramanujan la font en utilisant les propriétés de la fonction  $\Theta$  de Jacobi et l'équation fonctionnelle qu'elle vérifie, afin de simplifier l'expression intégrale de  $p(n)$

$$\forall 0 < r < 1, \quad p(n) = \frac{1}{2\pi r^n} \int_0^{2\pi} F(re^{it})e^{-int} dt \quad (129)$$

en mettant en valeur le rôle joué par les “singularités” de  $F$  qui ornent le bord du disque unité. Au bout de leurs efforts, ils obtiennent un développement asymptotique –non convergent, comme le prouve Lehmer en 1937– avec un nombre arbitraire de termes. Rademacher modifie leurs travaux pour obtenir en 1937 un développement convergent  $p(n)$ . On pourra consulter avec profit le huitième chapitre de [5] pour plus de détails, ou encore l'appendice A. de [14]. Le livre [9] de Hardy consacré à Ramanujan contient également un chapitre dédié à l'étude asymptotique des partitions d'entiers.

## 9 Traces, polynômes caractéristiques et extensions de corps

Ce qui suit est adapté du texte [7] de Yves Coudène.

**Théorème 25.** *On considère  $p_1, p_2, \dots, p_r$  des nombres premiers distincts. Alors la famille  $(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_r})$  est  $\mathbb{Q}$ -libre.*

Pour démontrer ce théorème, nous allons utiliser des outils de l'algèbre linéaire dans le  $\mathbb{Q}$ -espace vectoriel de dimension finie  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_r})$ . La structure de corps de cet espace vectoriel nous donnera des informations importantes sur les polynômes minimaux et caractéristiques que nous serons appelés à manipuler.

**Définition 26.** Soit  $K \subset L$  un extension finie de corps. Pour  $x \in L$ , on pose

$$\phi_x : \begin{array}{l} L \longrightarrow L \\ y \longmapsto xy \end{array} . \quad (130)$$

C'est un endomorphisme  $K$ -linéaire de  $L$ . On notera  $\text{Tr}(x)$  sa trace et  $\chi_x \in L[X]$  son polynôme caractéristique.

**Théorème 27.** *Dans le cadre de la définition précédente, on a*

1. *Le polynôme minimal de  $\phi_x$  est égal au polynôme minimal de  $x$  sur  $K$ . En particulier, ce polynôme  $\pi_x = \pi_{\phi_x}$  est irréductible dans  $K[X]$ .*
2. *Le polynôme caractéristique de  $\phi_x$  est une puissance du polynôme minimal de  $x$ . Il existe  $\alpha \geq 1$  tel que  $\chi_x = \pi_x^\alpha$ .*

*Démonstration.* Le point 1. vient du fait que tout polynôme annulateur de  $x$  est un polynôme annulateur de  $\phi_x$ , et réciproquement.

Le point 2. est un peu plus délicat. Tout d'abord, le théorème de Cayley-Hamilton assure que  $\chi_x$  est un polynôme annulateur de  $x$  et donc  $\pi_x | \chi_x$  dans  $K[X]$ . Soit  $\alpha \geq 1$  maximal tel que  $\chi_x = \pi_x^\alpha Q$  avec  $Q \in K[X]$ .

Montrons que  $Q$  est un polynôme constant, ce qui terminera la preuve. Supposons le contraire et fixons  $\lambda \in \bar{K}$  une racine de  $Q$  dans la clôture algébrique  $\bar{K}$ .

Alors, comme  $\pi_{\phi_x}$  et  $\chi_x$  partagent les mêmes racines dans  $\bar{K}$  (sans compter leur multiplicités),  $\lambda$  est également racine de  $\pi_x$ . Le polynôme  $\pi_x$  étant le polynôme minimal de  $x$  sur  $K$ , c'est en particulier un polynôme irréductible annulateur de  $\lambda$ . C'est donc le polynôme minimal de  $\lambda$ ,  $\pi_\lambda = \pi_x$ .

On en déduit  $\pi_x^{\alpha+1} | \chi_x$  dans  $K[X]$ , ce qui contredit la maximalité de  $\alpha$ .  $\square$

Nous appliquons ce théorème à  $K = \mathbb{Q}$  et  $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_r})$ . L'extension  $L/K$  est finie car engendrée par un nombre fini d'éléments algébriques. On introduit en outre la matrice symétrique (de Gram)

$$G = (\text{Tr} \sqrt{p_i p_j})_{i,j} \in M_r(\mathbb{Q}). \quad (131)$$

Soit  $x \in \mathbb{Q}^r$ . Etudions le nombre  ${}^t x G x \in \mathbb{Q}$ .

**D'une part**, on a

$${}^t x G x = \sum_{i,j} x_i x_j \text{Tr} \sqrt{p_i p_j}, \quad (132)$$

ce qui nous incite à calculer les  $\text{Tr} \sqrt{p_i p_j}$ . Si  $i = j$  alors  $\phi_{p_i}$  est une homothétie de rapport  $\frac{1}{d} p_i$ , où  $d = \dim_K(L)$ . Si  $i \neq j$ , le polynôme minimal de  $\sqrt{p_i p_j}$  est  $X^2 - p_i p_j \in \mathbb{Q}[X]$ , et donc

$$\chi_{\sqrt{p_i p_j}} = X^d - \text{Tr} \sqrt{p_i p_j} X^{d-1} + \dots \quad (133)$$

$$= \pi_{\sqrt{p_i p_j}}^\alpha = (X^2 - p_i p_j)^{d/2} = X^d - p_i p_j X^{2d-2} + \dots \quad (134)$$

On en déduit la nullité de la trace  $\text{Tr} \sqrt{p_i p_j} = 0$ , d'où

$${}^t x G x = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^r x_i^2 p_i. \quad (135)$$

**D'autre part**, la linéarité de la trace donne

$${}^t x G x = \text{Tr} \left( \sum_{i,j} x_i x_j \sqrt{p_i p_j} \right) = \text{Tr} \left[ \left( \sum_{i=1}^r x_i \sqrt{p_i} \right)^2 \right]. \quad (136)$$

Nous sommes prêts à conclure. Soit  $\sum_i \lambda_i \sqrt{p_i} = 0$  une combinaison linéaire nulle à coefficients rationnels  $\lambda_i \in \mathbb{Q}$ . Alors, si  $\Lambda = (\lambda_i)_i \in \mathbb{Q}^r$ ,

$$0 = \text{Tr} \left[ \left( \sum_{i=1}^r \lambda_i \sqrt{p_i} \right)^2 \right] = {}^t \Lambda G \Lambda = \frac{1}{d} \sum_{i=1}^r \lambda_i^2 p_i. \quad (137)$$

La positivité des  $\lambda_i^2 p_i$  assure que les  $\lambda_i$  sont tous nuls, d'où la liberté de la famille.

*Remarque 28.* La dimension de  $\mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, \dots, \sqrt{p_r})$  sur  $\mathbb{Q}$  est  $2^r$ .

*Remarque 29.* Le polynôme minimal d'un endomorphisme linéaire n'est pas en général irréductible, et donc le polynôme caractéristique n'est pas en général une puissance du polynôme minimal.



## 10 La fonction de Weierstraß

Le contenu de cette section provient du cours de Denis Choimet, donné au *Lycée du Parc* en 2013-2014, et se trouve également dans son livre [4] au chapitre VII, exercice 1 p. 199.

En cherchant des exemples de fonctions continues dérivables nulle part, Weierstraß propose en 1861 l'exemple suivant :

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \exp(2^n i t). \quad (138)$$

Il est élémentaire de voir que  $W$  n'est pas dérivable en 0. Pour cela, il suffit de voir que la partie imaginaire  $\text{Im}(W)$  n'est pas dérivable en 0. Fixons  $t > 0$ . Alors, une inégalité de convexité donne

$$\text{Im}(W(t)) = \sum_{2^n t \leq \pi/2} \frac{\sin(2^n t)}{2^n} + \sum_{2^n t > \pi/2} \frac{\sin(2^n t)}{2^n} \quad (139)$$

$$\geq \frac{2}{\pi} t \text{Card} \left\{ n \geq 1, \quad 2^n t \leq \frac{\pi}{2} \right\} + \sum_{2^n t > \pi/2} \frac{\sin(2^n t)}{2^n} \quad (140)$$

$$= \frac{2}{\pi} t \left\lfloor \log_2 \left( \frac{\pi}{2t} \right) \right\rfloor + \sum_{2^n t > \pi/2} \frac{\sin(2^n t)}{2^n}. \quad (141)$$

Or, pour  $t \rightarrow 0^+$ , on a

$$\sum_{2^n t > \pi/2} \frac{\sin(2^n t)}{2^n} = \frac{1}{2^{\lfloor \log_2(\frac{\pi}{2t}) \rfloor + 1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin(2^{n+f(t)})t}{2^n} = O(t). \quad (142)$$

Le taux d'accroissement autour de 0 vérifie donc

$$\frac{\text{Im}(W(t))}{t} \geq \frac{2}{\pi} \left\lfloor \log_2 \left( \frac{\pi}{2t} \right) \right\rfloor + O(1) \xrightarrow{t \rightarrow 0^+} +\infty. \quad (143)$$

En revanche, l'étude de la dérivabilité de  $W$  en d'autres points est plus difficile. On peut se convaincre rapidement que l'emploi de quelques formules de trigonométrie ne suffit pas à transporter le résultat obtenu en 0 ailleurs. Il faut changer de méthode.

C'est par l'analyse harmonique que nous allons obtenir ce que nous voulons. En regardant les coefficients de Fourier de  $W$ , qui ne décroissent pas plus vite que  $1/n$ , on peut déjà voir que  $W$  ne peut être de dérivée continue par morceaux.

Plus précisément, nous allons isoler les harmoniques de  $W$  en utilisant des "filtres" et ensuite les conséquences d'une éventuelle dérivabilité de  $W$  sur les coefficients de Fourier. Cette méthode est due à M. Riesz.

Nous notons  $\mathcal{S}$  la classe de Schwartz et nous considérons  $\phi \in \mathcal{S}$  telle que

$$\text{supp}(\phi) \subset \left[ \frac{1}{2}, 2 \right] \quad \text{et} \quad \phi(1) = 1. \quad (144)$$

On pose encore, pour  $p \geq 1$ ,  $\phi_p(x) = \phi\left(\frac{x}{2^p}\right)$ . Les fonctions  $\phi_p$  vérifient

$$\text{supp}(\phi_p) \subset [2^{p-1}, 2^{p+1}] \quad \text{et} \quad \phi_p(2^p) = 1, \quad (145)$$

de sorte que  $\phi_p(2^m) = \delta_{mn}$  pour  $p, m \geq 1$ .

Puisque la transformée de Fourier définit un isomorphisme  $\mathcal{F} : \mathcal{S} \rightarrow \mathcal{S}$  de la classe de Schwartz sur elle-même, nous pouvons fixer une fonction  $\psi \in \mathcal{S}$  telle que  $\hat{\psi} = \phi$ . Alors, un changement de variable donne

$$\phi_p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(t) \exp\left(-it\frac{x}{2^p}\right) dt \underset{t/2^p \rightarrow t}{=} 2^p \int_{-\infty}^{+\infty} \psi(2^p t) e^{-ixt} dt. \quad (146)$$

Les fonctions  $\phi_p$  sont donc des transformées de Fourier  $\phi_p = \hat{\psi}_p$  avec  $\psi_p(x) = 2^p \psi(2^p x)$ .

Calculons les produits de convolution  $W * \psi_p$ . Pour  $x \in \mathbb{R}$ ,

$$W * \psi_p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \psi_p(t) \frac{1}{2^n} \exp(2^n i(x-t)) dt \quad (147)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{2^n ix} \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(t) \exp(-2^n it) dt \quad (148)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} e^{2^n ix} \phi_p(2^n) \quad (149)$$

$$= \frac{1}{2^p} \exp(2^p it). \quad (150)$$

Ici, l'interversion des symboles  $\sum - \int$  est justifiée par le théorème de Fubini, puisque est remplie la condition

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{n=1}^{\infty} \left| \psi_p(t) \frac{1}{2^n} \exp(2^n i(x-t)) \right| dt = \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \right) \int_{-\infty}^{+\infty} |\psi_p(t)| dt < +\infty. \quad (151)$$

Maintenant, fixons  $x \in \mathbb{R}$  et supposons la dérivabilité de  $W$  en  $x$ . Nous allons voir que cela a une conséquence sur la forme de  $W * \psi_p(x)$ .

On peut écrire

$$W(t) = W(x) + (t-x)W'(x) + (t-x)\epsilon(t), \quad (152)$$

où  $\epsilon$  est une fonction continue bornée telle que  $\epsilon(x) = 0$ . Alors le produit de convolution  $W * \psi_p(x)$  s'écrit

$$W * \psi_p(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} [W(x) - tW'(x) - t\epsilon(x-t)] \psi_p(t) dt \quad (153)$$

$$= W(x) \int_{-\infty}^{+\infty} \psi_p(t) dt - W'(x) \int_{-\infty}^{+\infty} t\psi_p(t) dt - \int_{-\infty}^{+\infty} t\epsilon(x-t)\psi_p(t) dt \quad (154)$$

$$= W(x)\phi_p(0) - W'(x)\phi_p'(0) - \int_{-\infty}^{+\infty} t\epsilon(x-t)\psi_p(t) dt. \quad (155)$$

Mais souvenons-nous que  $\text{supp}(\psi_p) \subset [2^{p-1}, 2^{p+1}]$ , ce qui implique que  $\phi_p(0) = \phi_p'(0) = 0$ . Ainsi,

$$W * \psi_p(x) = - \int_{-\infty}^{+\infty} t \epsilon(x-t) \psi_p(t) dt \quad (156)$$

$$= -2^p \int_{-\infty}^{+\infty} t \epsilon(x-t) \psi(2^p t) dt \quad (157)$$

$$\stackrel{2^p t \rightarrow t}{=} -\frac{1}{2^p} \int_{-\infty}^{+\infty} t \epsilon\left(x - \frac{t}{2^p}\right) \psi(t) dt. \quad (158)$$

Le théorème de convergence dominée assure alors que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t \epsilon\left(x - \frac{t}{2^p}\right) \psi(t) dt \xrightarrow{p \rightarrow +\infty} 0, \quad (159)$$

et donc que

$$\frac{1}{2^p} e^{2^p i x} = W * \psi_p(x) = o\left(\frac{1}{2^p}\right). \quad (160)$$

C'est l'absurdité que nous cherchions !

*Remarque 30.* On peut facilement déduire de ceci que l'ensemble des fonctions continues  $C^0[0, 1]$  dérivables en aucun point de  $]0, 1[$  est dense dans  $C^0[0, 1]$ . Pour voir ceci, on approche  $f \in C^0[0, 1]$  d'abord par  $p \in \mathbb{C}[X]$  tel que  $\|f - P\|_{L^\infty} \leq \epsilon$ , puis on a  $\|f - (P + \epsilon W)\|_{L^\infty} \leq 2\epsilon$ , la fonction  $P + \epsilon W$  n'étant dérivable en aucun point.

*Remarque 31.* Le résultat que montre Weierstraß est que si  $0 < a < 1$  et  $ab > 1 + \frac{3\pi}{2}$  alors la fonction

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a^n \cos(b^n x) \quad (161)$$

n'est dérivable en aucun point. Hardy étend en 1916 ce résultat à  $0 < a < 1$  et  $ab \geq 1$ .

*Remarque 32.* Avant que Weierstraß ne donne son exemple de fonction continue nulle part dérivable, Riemann propose en 1860 la fonction suivante :

$$R(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n^2 x)}{n^2}. \quad (162)$$

Il est élémentaire de voir que  $R$  n'est pas dérivable en 0, mais la dérivabilité en les autres points est pendant longtemps restée mystérieuse. Les travaux de Hardy et Littlewood (1914 et 1916), puis de Gerver (1968) montrent que  $R$  est dérivable en  $x \in \mathbb{R}$  si et seulement si  $x$  est un nombre rationnel qui peut s'écrire comme le quotient de deux entiers impairs. Le chapitre VII de [4] est entièrement consacré à la fonction  $R$  de Riemann.

## 11 Théorème des phases de Salem

Le contenu de cette section provient du chapitre V de [4], pp. 116-120.

Ici, on note  $\mathbb{U} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

**Théorème 33** (Salem). *On considère des amplitudes  $\rho_1, \dots, \rho_N > 0$ . Alors il existe des phases  $\phi_1, \dots, \phi_N \in \mathbb{R}$  telles que*

$$\left\| \sum_{k=1}^N \rho_k \cos(kt + \phi_k) \right\|_{L^\infty(t \in \mathbb{U})} \leq C \sqrt{\log(N)} \left( \sum_{k=1}^N \rho_k^2 \right)^{1/2}, \quad (163)$$

où  $C$  est une constante numérique.

*Démonstration.* L'idée générale de la preuve est d'utiliser le fait que les normes  $L^p$  et  $L^\infty$  sont approximativement égales pour  $p$  assez grand. Puisque la norme  $L^p$  a un comportement plus régulier que la norme  $L^\infty$ , il sera plus facile d'ajuster les phases  $\phi_k$  afin d'obtenir un minimum.

On considère donc un entier pair  $p \geq 2$  que nous prendrons "assez grand" dans la suite. Pour  $x = (x_1, \dots, x_N) \in \mathbb{R}^N$ , posons

$$f(x, t) = \sum_{k=1}^N \rho_k \cos(kt + x_k) = f_x(t). \quad (164)$$

**Étape 1 :** optimisation de  $\|f_x\|_{L^p}$ .

Posons

$$\forall x \in \mathbb{R}^N, \quad F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x, t)^p dt. \quad (165)$$

Il ressort du théorème de dérivation sous le symbole intégral que la fonction  $F$  est de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^N$ . De plus, elle prend toutes ses valeurs sur le compact  $[0, 2\pi]^N$ . Elle admet donc un minimum en un  $\psi \in [0, 2\pi]^N$ .

La matrice hessienne  $\nabla^2 F(\psi)$  est alors symétrique positive, et ses valeurs propres sont des réels positifs (ou nuls). Ainsi, la trace  $\text{Tr}[\nabla^2 F(\psi)] = \Delta F(\psi)$  est positive ou nulle, puisque c'est la somme des valeurs propres. Calculons cette trace. Pour  $1 \leq k \leq N$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial x_k}(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p f(x, t)^{p-1} [-\rho_k \sin(kt + x_k)] dt \quad (166)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 F}{\partial x_k^2}(x) &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p(p-1) f(x, t)^{p-2} \rho_k^2 \sin^2(kt + x_k) dt \\ &\quad - \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} p f(x, t)^{p-1} \rho_k \cos(kt - x_k) dt, \end{aligned} \quad (167)$$

en sommant sur  $k$  et en évaluant en  $\psi$ ,

$$\begin{aligned} \Delta F(\psi) &= \frac{p(p-1)}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi, t)^{p-2} \left( \sum_{k=1}^N \rho_k^2 \sin^2(kt + \psi_k) \right) dt \\ &\quad - \frac{p}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi, t)^p dt \geq 0. \end{aligned} \quad (168)$$

En majorant  $\sin^2$  par 1, nous obtenons l'inégalité suivante :

$$\|f(x, t)\|_{L^p(t \in \mathbb{U})}^p \leq (p-1) \frac{1}{2\pi} \left( \sum_{k=1}^N \rho_k^2 \right) \int_0^{2\pi} f(\psi, t)^{p-2} dt. \quad (169)$$

**Etape 2 :** majoration de la norme  $L^p$ .

Si  $g \in L^\infty(\mathbb{U})$  alors l'inégalité de Hölder assure que la fonction :  $q \mapsto \|g\|_{L^q}$  est croissante. On en déduit

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\psi, t)^{p-2} dt = \|f_\psi\|_{L^{p-2}}^{p-2} \leq \|f_\psi\|_{L^p}^{p-2} \quad (170)$$

et, en combinant ceci avec (169),

$$\|f_\psi\|_{L^p}^2 \leq (p-1) \left( \sum_{k=1}^N \rho_k^2 \right) \quad (171)$$

$$\|f_\psi\|_{L^p} \leq \sqrt{p-1} \left( \sum_{k=1}^N \rho_k^2 \right)^{1/2}. \quad (172)$$

**Etape 3 :** comparaison avec la norme  $L^\infty$ .

Tout d'abord, remarquons que si  $g(t) = \sum_{k=-M}^M a_k e^{ikt}$  est un polynôme trigonométrique, l'inégalité de Cauchy-Schwarz dans  $\mathbb{C}^M$  fournit

$$|g'(t)| = \left| \sum_{-M}^M k a_k e^{ikt} \right| \leq \left( \sum_{-M}^M |a_k|^2 \right)^{1/2} \left( \sum_{-M}^M k^2 \right)^{1/2} \leq CM^{3/2} \|g\|_{L^2} \quad (173)$$

$$\|g'\|_{L^\infty} \leq CM^{3/2} \|g\|_{L^\infty}, \quad (174)$$

où dans ces deux inégalités,  $C > 0$  est une constante numérique.

Munis de cette majoration, utilisons l'inégalité des accroissements finis pour minorer  $|f_\psi|$  au voisinage d'un maximum. Soit  $t_0 \in \mathbb{U}$  tel que  $|f_\psi(t_0)| = \|f_\psi\|_{L^\infty} := A$  (un tel  $t_0$  existe puisque  $f_\psi$  est continue et prend toutes ses valeurs sur le compact  $[0, 2\pi]^N$ ). Alors, pour  $t \in \mathbb{R}$ ,

$$|f_\psi(t) - A| \leq \|f'_\psi\|_{L^\infty} |t - t_0| \leq C(2N)^{3/2} \|f_\psi\|_{L^\infty} |t - t_0|. \quad (175)$$

Et donc, pourvu que  $|t - t_0| \leq \frac{1}{2C(2N)^{3/2}}$ , on a  $|f_\psi(t) - A| \leq \frac{1}{2}A$  et  $|f_\psi(t)| \geq \frac{1}{2}A$ . Ceci nous permet de minorer la norme  $L^p$  par la norme  $L^\infty$ .

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f_\psi(t)^p dt \geq \frac{1}{2\pi} \int_{t_0 - \frac{1}{2C(2N)^{3/2}}}^{t_0 + \frac{1}{2C(2N)^{3/2}}} f_\psi(t)^p dt \geq \frac{1}{2\pi} \left( \frac{1}{2} \|f_\psi\|_{L^\infty} \right)^p \frac{1}{C(2N)^{3/2}} \quad (176)$$

$$\|f_\psi\|_{L^\infty} \leq 2 \left( 2\pi C(2N)^{3/2} \right)^{1/p} \|f_\psi\|_{L^p}, \quad (177)$$

$$\|f_\psi\|_{L^\infty} \leq 2(C'N)^{\frac{3}{2p}} \|f_\psi\|_{L^p}, \quad (178)$$

où  $C' > 0$  est (une autre) constante numérique.

**Etape 4 :** conclusion.

Les inégalités (172) et (177) donnent ensemble

$$\|f_\psi\|_{L^\infty} \leq 2(CN)^{3/2} \sqrt{p-1} \left( \sum_{k=1}^N \rho_k^2 \right)^{1/2} = 2\sqrt{p-1} \exp\left(\frac{3}{2p} \log(CN)\right) \left( \sum_{k=1}^N \rho_k^2 \right)^{1/2}. \quad (179)$$

Choisissons  $p$  comme étant le plus petit entier pair tel que  $\frac{3}{2p} \log(CN) \leq 1$ . Alors on a effectivement

$$\|f_\psi\|_{L^\infty} \leq \text{Cte} \sqrt{\log(N)} \left( \sum_{k=1}^N \rho_k^2 \right)^{1/2}. \quad (180)$$

□

*Remarque 34.* Le terme  $\sqrt{\log(N)}$  dans le théorème est optimal, c'est à dire qu'il ne peut pas être remplacé par un terme de croissance plus lente. Il y a plusieurs façons de voir ceci. Par exemple, [4] remarque que l'égalité est atteinte pour

$$f(t) = \sum_{k=1}^M \cos(3^k + \phi_k). \quad (181)$$

En effet, le spectre  $\Lambda = \{3^k, k \geq 1\}$  de  $f$  forme un ensemble de Sidon (voir section 2). Ainsi, si  $N = 3^M$  est le degré de  $f$ , quelque soient les phases  $\phi_k$ ,

$$M = \log_3(N) \leq \text{Cte} \|f\|_{L^\infty} \leq \text{Cte} \sqrt{\log(N)} \left( \sum_{k=1}^N \rho_k^2 \right)^{1/2} = \text{Cte} \log_3(N). \quad (182)$$

*Remarque 35.* Il existe un moyen beaucoup plus élémentaire de voir l'optimalité de  $\sqrt{\log(N)}$ . Considérons un signal de la forme

$$\forall t \in \mathbb{R}, \quad f_\lambda(t) = \sum_{k=1}^n \cos(\lambda^k t + \phi_k), \quad (183)$$

où  $\lambda \geq 2$  est un nombre entier. Nous allons montrer l'existence de deux constantes numériques  $C_1, C_2 > 0$  telles que

$$\forall \lambda \geq C_2, \quad \|f_\lambda\|_{L^\infty} \geq C_1 n. \quad (184)$$

On obtient, en posant définissant  $N$  comme étant le degré du polynôme (183), c'est à dire  $N = \lambda^n$ ,

$$\frac{\|f_\lambda\|_{L^\infty}}{\|f_\lambda\|_{L^2}} \geq \text{Cte} \frac{n}{\sqrt{n}} = \text{Cte} \sqrt{\log(N)}. \quad (185)$$

*Démonstration de l'inégalité (184).* On procède par récurrence sur  $n \geq 1$ . On écrit

$$f_\lambda(t) = \sum_{k=1}^n \cos(\lambda^k + \phi_k) + \cos(\lambda^n \phi_n) := g_\lambda(t) + \cos(\lambda^n \phi_n). \quad (186)$$

L'idée générale est que, comme  $g_\lambda$  est constitué de fréquences inférieures à  $\lambda^{n-1}$ , cette fonction sera "presque constante" sur une période de  $\cos(\lambda^n + \phi_n)$ . Par conséquent, on s'attend à ce que

$$\|f_\lambda\|_{L^\infty} \approx \|g_\lambda\|_{L^\infty} + 1. \quad (187)$$

Rendons rigoureux cet argument. Par hypothèse de récurrence, nous savons déjà que  $\|g_\lambda\|_{L^\infty} \geq C_1(n-1)$  dès que  $\lambda \geq C_2$ . Fixons  $t_0 \in \mathbb{R}$  tel que  $\|g_\lambda\|_{L^\infty} = |g_\lambda(t_0)| > 0$ . La fonction  $g_\lambda$  est en effet non identiquement nulle, par indépendance linéaire des monômes trigonométriques. Posons

$$s = \min \left\{ t \geq t_0, \quad \cos(\lambda^n t + \phi_n) = \frac{g_\lambda(t_0)}{|g_\lambda(t_0)|} \right\} \leq t_0 + \frac{2\pi}{\lambda^n}. \quad (188)$$

Le nombre  $s$  est la valeur du paramètre de temps la plus proche de  $t_0$  qui fasse contribuer le cosinus à une augmentation de "presque 1" à  $\|f_\lambda\|_{L^\infty}$ . Écrivons-le.

$$|f_\lambda(s)| = \left| g_\lambda(s) + \frac{g_\lambda(t_0)}{|g_\lambda(t_0)|} \right| = \left| g_\lambda(t_0) + \frac{g_\lambda(t_0)}{|g_\lambda(t_0)|} + g_\lambda(s) - g_\lambda(t_0) \right| \quad (189)$$

$$\geq \left| g_\lambda(t_0) + \frac{g_\lambda(t_0)}{|g_\lambda(t_0)|} \right| - \|g'_\lambda\|_{L^\infty} |t_0 - s|. \quad (190)$$

En calculant explicitement la dérivée de  $g_\lambda$  et en majorant brutalement, on trouve que

$$\|g'_\lambda\|_{L^\infty} \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k = \lambda \frac{\lambda^{n-1} - 1}{\lambda - 1} \leq \frac{\lambda^n}{\lambda - 1}. \quad (191)$$

Nous pouvons, en reprenant l'inégalité (190), effectuer notre minoration :

$$\|f_\lambda\|_{L^\infty} \geq \|g_\lambda\|_{L^\infty} + 1 - \frac{2\pi}{\lambda^n} \frac{\lambda^n}{\lambda - 1}. \quad (192)$$

Ceci montre qu'il est possible de choisir comme constantes

$$C_2 = 1 - \frac{2\pi}{\lambda - 1} \quad (193)$$

et  $C_1$  suffisamment grande pour avoir  $C_2 > 0$ . Comme ces constantes sont indépendantes de  $n$ , on peut les utiliser à chaque étape de la récurrence pour avoir  $\|f_\lambda\|_{L^\infty} \geq nC_1$ , ce qui achève la démonstration.  $\square$

## 12 Théorème de Kolmogorov sur la convergence de séries aléatoires

Le contenu de cette section provient de [2], chapitre 22, pp. 296-299.

Nous nous intéressons à la convergence de séries dont les termes sont des variables aléatoires centrées indépendantes.

**Théorème 36** (Kolmogorov). *Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $X_1, X_2, \dots, X_j, \dots \in L^2(\Omega)$  des variables aléatoires centrées mutuellement indépendantes. Si  $\sum_{j \geq 1} \text{Var}(X_j) < +\infty$  alors la série  $\sum X_j$  converge presque-sûrement.*

*Démonstration.* La preuve de ce fait repose sur une inégalité maximale, elle aussi due à Kolmogorov.

**Lemme 37** (Inégalité de Kolmogorov). *Avec les mêmes notations, pour tout  $n \geq 1$ ,*

$$\forall \epsilon > 0, \quad \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=1}^k X_j \right| \geq \epsilon \right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j=1}^n \text{Var}(X_j^2) \quad (194)$$

Admettons provisoirement ce lemme et concluons. Nous allons montrer que  $\sum X_j$  nie le critère de Cauchy avec probabilité nulle. Fixons  $\epsilon > 0$ . L'inégalité de Kolmogorov fournit, pour  $n, r \geq 1$ ,

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq r} \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} X_j \right| \geq \epsilon \right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j=n+1}^r \text{Var}(X_j) \quad (195)$$

$$\leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} \text{Var}(X_j). \quad (196)$$

La continuité croissante des mesures de probabilité permet de faire  $r \rightarrow +\infty$  dans cette inégalité en obtenant

$$\mathbb{P} \left( \sup_{k \geq 1} \left| \sum_{j=n+1}^{n+k} X_j \right| \geq \epsilon \right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j=n+1}^{\infty} \text{Var}(X_j). \quad (197)$$

Ensuite, comme pour tout  $p > q > N \geq 1$  entiers,

$$\left| \sum_{j=q}^p X_j \right| = \left| \sum_{j=N+1}^p X_j - \sum_{j=N+1}^{q-1} X_j \right| \leq 2 \sup_{k \geq 1} \left| \sum_{j=N+1}^{N+k} X_j \right| \leq \infty, \quad (198)$$

nous déduisons de (197) que, pour  $N \geq 1$ ,

$$\mathbb{P} \left( \left( \sup_{p > q > N} \sum_{j=q}^p X_j \right) \geq \epsilon \right) \leq \mathbb{P} \left( \sup_{k \geq 1} \left| \sum_{j=N+1}^{N+k} X_j \right| \geq \frac{1}{2} \epsilon \right) \quad (199)$$

$$\leq \frac{4}{\epsilon^2} \sum_{j=N+1}^{\infty} \text{Var}(X_j) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \quad (200)$$

Enfin, la croissance de la mesure donne, pour chaque  $M \geq 1$ ,

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{N \geq 1} \sup_{p > q > N} \left| \sum_{j=q}^p X_j \right| \geq \epsilon \right) \leq \mathbb{P} \left( \sup_{p > q > M} \left| \sum_{j=q}^p X_j \right| \geq \epsilon \right) \xrightarrow{M \rightarrow +\infty} 0 \quad (201)$$

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{N \geq 1} \sup_{p > q > N} \left| \sum_{j=q}^p X_j \right| \geq \epsilon \right) = 0. \quad (202)$$



et donc, par  $\sigma$ -sous-additivité,

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcap_{N \geq 1} \sup_{p > q > N} \left| \sum_{j=q}^p X_j \right| \geq \epsilon \right) = 0, \quad (203)$$

ce qui conclut la preuve.  $\square$

*Démonstration du lemme.* Posons  $S_k = X_1 + \dots + X_k$  pour  $k \geq 1$  et notons

$$A_k = (|S_1| < \epsilon) \cap (|S_2| < \epsilon) \cap \dots \cap (|S_k - 1| < \epsilon) \cap (|S_k| \geq \epsilon), \quad (204)$$

de sorte que les  $A_j$  soient disjoints avec  $\mathbb{P}(A_1 \sqcup \dots \sqcup A_n) = \mathbb{P}(\max_{1 \leq j \leq n} |S_j| \geq \epsilon)$ . On a donc

$$\mathbb{E}(S_n^2) \geq \sum_{j=1}^n \int_{A_j} S_n(\omega)^2 d\mathbb{P}(\omega) = \sum_{j=1}^n \int_{A_j} (S_j^2 + S_n^2 - S_j^2) d\mathbb{P} \quad (205)$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{A_j} [S_j^2 + (S_n - S_j)(S_n + S_j)] d\mathbb{P} \quad (206)$$

$$= \sum_{j=1}^n \int_{A_j} [S_j^2 + 2S_j(S_n - S_j) + (S_n - S_j)^2] d\mathbb{P} \quad (207)$$

$$\geq \sum_{j=1}^n \int_{A_j} [S_j^2 + 2S_j(S_n - S_j)] d\mathbb{P}. \quad (208)$$

Nous allons maintenant utiliser l'indépendance des  $X_j$ . On a :

$$\begin{cases} S_j \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_j) \\ A_j \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_j) \\ S_n - S_j \in \sigma(X_{j+1}, \dots, X_n) \end{cases} . \quad (209)$$

On en déduit que les variables aléatoires  $\mathbb{1}_{A_j} S_j$  et  $S_n - S_j$  sont indépendantes. En particulier,

$$\int_{A_j} S_j(S_n - S_j) d\mathbb{P} = \mathbb{E}[\mathbb{1}_{A_j} S_j(S_n - S_j)] = 0. \quad (210)$$

Nous pouvons terminer la preuve :

$$\mathbb{E}(S_n^2) \geq \sum_{j=1}^n \int_{A_j} S_j^2 d\mathbb{P} \quad (211)$$

$$\geq \epsilon^2 \mathbb{P} \left( \bigsqcup_{j=1}^n A_j \right) = \epsilon^2 \mathbb{P} \left( \max_{1 \leq j \leq n} |S_j| \geq \epsilon \right). \quad (212)$$

$\square$

*Remarque 38.* En particulier, si  $\epsilon_1, \epsilon_2, \dots$  sont des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher  $\mathcal{R}(1/2)$  sur un même espace de probabilité, alors la série

$$\sum \frac{\epsilon_n}{n^{\epsilon+1/2}} \quad (213)$$

est presque sûrement convergente pour tout  $\epsilon > 0$ .

*Remarque 39.* Le résultat de convergence que nous venons de montrer admet une réciproque partielle (voir [10] chapitre 1, théorème III.4 pp. 22-23) : si  $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  sont des variables aléatoires indépendantes (pas forcément centrées) et uniformément bornées par une constante  $C > 0$ , alors la convergence presque-sûre de la série  $\sum X_j$  implique que  $\sum_{j \geq 1} \text{Var}(X_j) < +\infty$ .

### 13 Inégalité d'Etemadi et convergence de séries aléatoires

Le contenu de cette section est tiré de [2], chapitre 6, pp. 297-299.

**Théorème 40.** *Soit  $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$  un espace de probabilité et  $X_1, \dots, X_n, \dots : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  des variables aléatoires indépendantes. La série  $\sum X_n$  converge presque-sûrement si et seulement si elle converge en probabilité.*

*Démonstration.* Puisque la convergence presque sûre implique la convergence en probabilité ([2] chapitre 4, théorème 20.5 p.274), il nous suffit de montrer que si la série  $\sum X_n$  converge en probabilité alors elle converge presque sûrement.

Nous utilisons l'inégalité maximale suivante :

**Lemme 41** (Inégalité d'Etemadi). *Avec les mêmes notations, si  $n \geq 1$  et  $\epsilon > 0$*

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} \left| \sum_{j=1}^k X_j \right| \geq 4\epsilon \right) \leq 4 \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P} \left( \left| \sum_{j=1}^k X_j \right| \geq \epsilon \right). \quad (214)$$

Nous prouverons ce lemme après avoir démontré le théorème. Nous allons montrer que  $\sum X_j$  nie le critère de Cauchy avec probabilité nulle. Soit  $\epsilon > 0$  fixé.

Notons  $S : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$  la limite en probabilité de  $S_n = X_1 + \dots + X_n$ . Alors, pour  $n, j \geq 1$ ,

$$\mathbb{P}(|S_{n+j} - S_n| \geq \epsilon) \leq \mathbb{P} \left( |S_{n+j} - S| \geq \frac{1}{2}\epsilon \right) + \mathbb{P} \left( |S_n - S| \geq \frac{1}{2}\epsilon \right). \quad (215)$$

de là,

$$\sup_{j \geq 1} \mathbb{P}(|S_{n+j} - S_n| \geq \epsilon) \leq \sup_{j \geq 1} \mathbb{P} \left( |S_{n+j} - S| \geq \frac{1}{2}\epsilon \right) + \mathbb{P} \left( |S_n - S| \geq \frac{1}{2}\epsilon \right) \quad (216)$$

et, comme  $S_n \longrightarrow S$  en probabilité,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \sup_{j \geq 1} \mathbb{P}(|S_{n+j} - S_n| \geq \epsilon) = 0. \quad (217)$$

L'inégalité d'Etemadi fournit par ailleurs, pour  $k \geq 1$ ,

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq j \leq k} |S_{n+j} - S_n| \geq \epsilon \right) \leq 4 \max_{1 \leq j \leq k} \mathbb{P} \left( |S_{n+j} - S_n| \geq \frac{1}{4}\epsilon \right) \quad (218)$$

et, par continuité croissante, lorsque  $k \rightarrow +\infty$  dans cette inégalité,

$$\mathbb{P} \left( \sup_{j \geq 1} |S_{n+j} - S_n| \geq \epsilon \right) \leq 4 \sup_{j \geq 1} \mathbb{P} \left( |S_{n+j} - S_n| \geq \frac{1}{4} \epsilon \right) \quad (219)$$

$$\mathbb{P} \left( |S_{n+j} - S_n| \geq \frac{1}{4} \epsilon \right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0. \quad (220)$$

Enfin, si  $p > q > N$  sont des entiers,

$$\left| \sum_{j=q}^p X_j \right| = \left| \sum_{j=N+1}^p X_j - \sum_{j=N+1}^{q-1} X_j \right| \leq 2 \sup_{k \geq 1} \left| \sum_{j=N+1}^{N+k} X_j \right| = 2 \sup_{k \geq 1} |S_{N+k} - S_N|, \quad (221)$$

et donc

$$\mathbb{P} \left( \sup_{p > q > N} \left| \sum_{j=q}^p X_j \right| \geq \epsilon \right) \leq \mathbb{P} \left( \sup_{k \geq 1} |S_{N+k} - S_N| \geq \frac{1}{2} \epsilon \right) \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} 0. \quad (222)$$

La croissance de la mesure donne ensuite

$$\mathbb{P} \left( \bigcap_{N \geq 1} \sup_{p > q > N} \left| \sum_{j=q}^p X_j \right| \geq \epsilon \right) = 0 \quad (223)$$

et la  $\sigma$ -sous-additivité de la mesure donne enfin

$$\mathbb{P} \left( \bigcup_{\epsilon \in \mathbb{Q}_+^*} \bigcap_{N \geq 1} \sup_{p > q > N} \left| \sum_{j=q}^p X_j \right| \geq \epsilon \right) = 0, \quad (224)$$

□

*Démonstration du lemme.* Posons, pour  $k \geq 1$ ,

$$B_k = (|S_1| < 4\epsilon) \cap \dots \cap (|S_{k-1}| < 4\epsilon) \cap (|S_k| \geq 4\epsilon) \quad (225)$$

de sorte que les  $B_k$  sont des événements disjoints tels que  $\mathbb{P}(B_1 \sqcup \dots \sqcup B_n) = \mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \epsilon)$ . Alors, la croissance et la  $\sigma$ -sous-additivité de la mesure donnent ensemble :

$$\mathbb{P} \left( \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq \epsilon \right) = \mathbb{P} \left( \left( \max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq 4\epsilon \right) \cap [ (|S_n| \geq 2\epsilon) \sqcup (|S_n| < 2\epsilon) ] \right) \quad (226)$$

$$\leq \mathbb{P} (|S_n| \geq 2\epsilon) + \mathbb{P} \left( (|S_n| < 2\epsilon) \cap \bigsqcup_{k=1}^{n-1} B_k \right) \quad (227)$$

$$= \mathbb{P} (|S_n| \geq 2\epsilon) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_k \cap [|S_n| < 2\epsilon]) \quad (228)$$

$$\leq \mathbb{P} (|S_n| \geq 2\epsilon) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_k \cap [|S_n - S_k| > 2\epsilon]). \quad (229)$$

en effet,  $|S_n| < 2\epsilon$  et  $|S_k| \geq 4\epsilon$  impliquent  $|S_n - S_k| > 2\epsilon$ . Nous nous servons maintenant de l'indépendance des  $X_j$ . Nous avons

$$\begin{cases} B_k \in \sigma(X_1, X_2, \dots, X_k) \\ S_{n-k} \in \sigma(X_{k+1}, \dots, X_n) \end{cases} \quad (230)$$

ce qui implique que les événements  $B_k$  et  $|S_n - S_k| > 2\epsilon$  sont indépendants. Ainsi, en convenant que  $S_0 = 0$ ,

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq 4\epsilon) \leq \mathbb{P}(|S_n| \geq 2\epsilon) + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbb{P}(B_k) \mathbb{P}(|S_n - S_k| > 2\epsilon) \quad (231)$$

$$\leq \left[ \max_{0 \leq k \leq n-1} \mathbb{P}(|S_n - S_k| \geq 2\epsilon) \right] \left( 1 + \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(B_k) \right) \quad (232)$$

$$\leq 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} \mathbb{P}(|S_n - S_k| \geq 2\epsilon). \quad (233)$$

En appliquant l'inégalité (233) à la suite  $Y_j = X_{n-j+1}$ , nous obtenons une inégalité symétrique :

$$\mathbb{P} \left( \max_{0 \leq k \leq n-1} |S_n - S_k| \geq 2\epsilon \right) \leq 2 \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(|S_k| \geq 2\epsilon). \quad (234)$$

La combinaison des inégalités (233) et (234) donne le résultat :

$$\mathbb{P}(\max_{1 \leq k \leq n} |S_k| \geq 4\epsilon) \leq 2 \max_{0 \leq k \leq n-1} \mathbb{P}(|S_n - S_k| \geq 2\epsilon) \quad (235)$$

$$\leq 2\mathbb{P} \left( \max_{0 \leq k \leq n-1} |S_n - S_k| \geq 2\epsilon \right) \quad (236)$$

$$\leq 4 \max_{1 \leq k \leq n} \mathbb{P}(|S_k| \geq \epsilon). \quad (237)$$

□

*Remarque 42.* Le théorème que nous venons de montrer a pour conséquence le théorème de Kolmogorov sur les séries aléatoires (section 12). En effet, si les  $X_j$  vérifient  $\sum_{j \geq 1} \text{Var}(X_j) < +\infty$ , alors la série  $\sum X_j$  converge en probabilité : l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev fournit :

$$\mathbb{P} \left( \left| \sum_{j=q}^p X_j \right| \geq \epsilon \right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{j=q}^p \text{Var}(X_j) \xrightarrow{p > q \geq N \rightarrow +\infty} 0. \quad (238)$$

Par ailleurs, l'inégalité d'Etymadi implique celle de Kolmogorov, à un facteur 64 près, toujours *via* l'inégalité de Bienaymé-Tchebychev.

## 14 Alternative de Fredholm

Le contenu de cette section provient du Chapitre 6 de [3].

Dans tout ce qui suit  $E$  est un espace de Banach dont on note  $\| \cdot \|$  la norme.

**Lemme 43** (de Riesz). *Soit  $F \subset E$  un sous-espace fermé strict. Alors, pour chaque  $\epsilon > 0$ , il est possible de fixer  $u \in E$  de norme unitaire  $\|u\| = 1$  tel que  $d(u, F) \geq 1 - \epsilon$ .*

*Démonstration.* Bien sûr, on peut supposer  $1 - \epsilon > 0$  et  $F \neq \{0\}$ . Soit  $v \in E$  avec  $v \notin F$ . Alors, puisque  $F$  est fermé,  $d(v, F) > 0$ . Soit  $f_0 \in F$  tel que

$$d(v, F) \leq \|v - f_0\| \leq \frac{d(v, F)}{1 - \epsilon}. \quad (239)$$

Alors le vecteur de norme unitaire

$$u = \frac{v - f_0}{\|v - f_0\|} \quad (240)$$

vérifie, pour  $f \in F$ ,

$$\|u - f\| = \left\| \frac{v - f_0}{\|v - f_0\|} - f \right\| = \frac{1}{\|v - f_0\|} \|v - (f_0 + \|v - f_0\|f)\| \quad (241)$$

$$\geq \frac{d(v, F)}{\|v - f_0\|} \geq 1 - \epsilon. \quad (242)$$

Ceci conclut la preuve. □

*Remarque 44.* Le théorème de Riesz, qui assure qu'un espace normé est de dimension finie si et seulement si sa boule unité est compacte, est une conséquence directe de ce lemme.

**Théorème 45** (Alternative de Fredholm). *Soit  $T : E \rightarrow E$  un opérateur compact. Alors*

1. *On a  $\dim \ker(I - T) < +\infty$ ,*
2. *Le sous-espace  $\text{Im}(I - T)$  est fermé dans  $E$ ,*
3. *L'opérateur  $I - T$  est injectif si et seulement si il est inversible.*

*Remarque 46.* Soit  $\lambda \in \mathbb{C}^*$ . Le premier point affirme que le sous-espace propre associé à  $\lambda$  est de dimension finie (éventuellement nulle). Le troisième point affirme que  $\lambda$  est une valeur spectrale de  $T$  si et seulement si c'est une valeur propre.

*Démonstration.* Montrons le premier point. Notons  $F = \ker(I - T)$ . C'est le sous-espace des points fixes de l'opérateur  $T$ . Alors, si  $B_F$  est la boule unité fermée de  $F$  et  $B_E$  celle de  $E$ , on a  $B_F \subset T(B_E)$  ce qui implique que  $B_F$  est une partie compacte de  $E$ , donc de  $F$ . Le théorème de Riesz assure que  $F$  est nécessairement de dimension finie.

Montrons le deuxième point à l'aide de la caractérisation séquentielle de la fermeture. Munissons nous d'une suite de points  $y_n \in \text{Im}(I - T)$  qui convergent dans  $E$  vers une limite  $y$  et montrons que  $y \in \text{Im}(I - T)$ .

Pour chaque  $n \geq 0$ , on peut fixer  $x_n \in E$  avec  $y_n = x_n - Tx_n$ . Ensuite, comme  $\ker(I - T)$  est de dimension finie, il existe un  $u_n \in \ker(I - T)$  tel que

$$d(x_n, \ker(I - T)) = \|x_n - u_n\|. \quad (243)$$

Alors, comme  $Tu_n = u_n$ , on a

$$y_n = (x_n - u_n) - T(x_n - u_n). \quad (244)$$

Distinguons deux cas.

1. Supposons que  $\|x_n - u_n\|$  reste borné. Alors, puisque  $T$  est compact, quitte à extraire, on peut supposer la suite  $T(x_n - u_n)$  convergente de limite  $w \in E$ . Comme  $y_n \rightarrow y$ , la relation (244) implique que

$$x_n - u_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} y + w := l, \quad (245)$$

et, par continuité de  $T$ , on a  $T(x_n - u_n) \rightarrow Tl$ . Comme par ailleurs  $T(x_n - u_n) \rightarrow w$ , l'unicité de la limite fournit  $Tl = w$ , et donc  $y = l - w = l - Tl$ , d'où le résultat.

2. Supposons maintenant que  $\|x_n - u_n\|$  ne soit pas borné. Quitte à extraire, on peut supposer  $\|x_n - u_n\| \rightarrow +\infty$ . Posons

$$w_n := \frac{x_n - u_n}{\|x_n - u_n\|}. \quad (246)$$

Comme les  $w_n$  sont de normes unitaires, quitte à extraire, on peut supposer la suite  $Tw_n$  convergente de limite  $z \in E$ . La suite  $(y_n)$  est convergente donc bornée. Ceci implique que

$$w_n - Tw_n = \frac{y_n}{\|x_n - u_n\|} \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} 0, \quad (247)$$

et donc  $w_n \rightarrow z$ . L'élément  $z$  satisfait donc  $z = Tz$  et  $z \in \ker(I - T)$ . Il en découle

$$w_n \xrightarrow[n \rightarrow +\infty]{} z \in \ker(I - T) \quad (248)$$

et, en particulier,  $d(w_n, \ker(I - T)) \rightarrow 0$ . Or, comme  $u_n \in \ker(I - T)$ ,

$$d(w_n, \ker(I - T)) = d\left(\frac{x_n - u_n}{\|x_n - u_n\|}, \ker(I - T)\right) \quad (249)$$

$$= d\left(\frac{x_n}{\|x_n - u_n\|}, \ker(I - T)\right) \quad (250)$$

$$= \frac{d(x_n, \ker(I - T))}{\|x_n - u_n\|} = 1, \quad (251)$$

ce qui est absurde.

Le deuxième cas ne peut être vérifié, ce qui implique que le premier cas l'est automatiquement et conclut la preuve du deuxième point.

Montrons le troisième point. Tout d'abord, si  $I - T$  est inversible alors il est nécessairement injectif. Supposons que  $I - T$  est injectif et supposons qu'il n'est pas surjectif<sup>11</sup> en vue d'obtenir une contradiction.

Posons  $E_1 = \text{Im}(I - T)$ . C'est un sous espace fermé strict de  $E$  stable par  $T$ . On peut considérer la restriction  $T_1 = T|_{E_1} : E_1 \rightarrow E_1$ . Montrons que  $T_1$  vérifie les mêmes propriétés que  $T$ .

<sup>11</sup> Le théorème d'inversion de Banach assure que, puisque  $I - T$  est injectif, il est non inversible si et seulement si non surjectif.

1. L'espace  $E_1$  est fermé dans l'espace de Banach  $E$ , donc est aussi un espace de Banach.
2. L'opérateur  $T_1$  est la restriction de l'opérateur compact  $T$ . C'est donc aussi un opérateur compact.
3. L'opérateur  $T_1$  n'est pas surjectif. En effet, si  $E_2 = \text{Im}(I - T_1) = (I - T)^2(E)$ , l'injectivité de  $I - T$  fournit  $E_2 \subsetneq E_1$ .

En raisonnant par récurrence, on construit ainsi une suite de sous-espaces fermés

$$\cdots \subsetneq E_{n+1} \subsetneq E_n \subsetneq \cdots \subsetneq E_2 \subsetneq E_1 \subsetneq E. \quad (252)$$

Le lemme de Riesz permet alors de fixer, pour chaque  $n \geq 1$ , un élément  $u_n \in E_n$  tel que  $\|u_n\| = 1$  et  $d(u_n, E_{n+1}) \geq 1/2$ . Montrons que la suite  $Tu_n$  ne peut avoir de suite extraite convergente, ce qui fournira la contradiction convoitée. Pour  $p > q$ , on a :

$$Tu_p - Tu_q = \underbrace{-(u_p - Tu_p)}_{\in E_{p+1}} + \underbrace{(u_q - Tu_q)}_{E_{q+1}} + \underbrace{u_p}_{E_{p+1}} - u_q. \quad (253)$$

Comme  $E_{p+1} \subset E_p \subset E_{q+1}$ , cela permet d'écrire  $Tu_p - Tu_q = w_{pq} - u_q$  avec  $w_{pq} \in E_{q+1}$ . Par construction de  $u_q$ , on a alors

$$\|Tu_p - Tu_q\| = \|w_{pq} - u_q\| \geq 1/2, \quad (254)$$

ce qui interdit l'existence d'une suite extraite convergente.  $\square$

*Remarque 47.* Les exemples d'opérateurs compacts ne manquent pas. Par exemple, les opérateurs à noyau

$$Tf(x) = \int_0^1 f(t)K(t, x)dt \quad (255)$$

définis sur  $L^2(0, 1)$  (où  $K : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{C}$  est continue) sont des opérateurs compacts. Mais ce ne sont pas les seuls ! Les réciproques de certains opérateurs différentiels elliptiques sont compactes : par exemple, l'opérateur réciproque du Laplacien sur un ouvert borné  $\Omega$  de classe  $C^1$ ,  $\Delta : H^2(\Omega) \cap H_0^1(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ , définit un opérateur compact<sup>12</sup>  $\Delta^{-1} : L^2(\Omega) \rightarrow L^2(\Omega)$ .

## 15 Théorème du point fixe de Brouwer dans le plan

Le contenu de cette section provient de la Section 6 du Chapitre 25 de [1].

Nous allons montrer le théorème suivant :

**Théorème 48** (du point fixe de Brouwer). *Soit  $D \subset \mathbb{R}^2$  le disque unité fermé et  $f : D \rightarrow D$  une application continue. Alors  $f$  admet un point fixe.*

<sup>12</sup>. Certes, on pourrait répliquer que l'opérateur résolvante  $\Delta^{-1}$  est un opérateur à noyau, ce noyau étant une fonction de Green associée à  $\Omega$  avec des conditions de Dirichlet sur  $\partial\Omega$ . Il n'en reste que le Laplacien est d'abord un opérateur différentiel dont nous observons *a posteriori* qu'il a un résolvante s'écrivant sous la forme d'un opérateur à noyau.

*Remarque 49.* Tout compact convexe du plan est homéomorphe au disque unité. Le résultat s'étend donc aux fonctions continues définies sur de tels compacts.

La preuve de ce théorème repose sur un résultat de théorie des graphes, le lemme de Sperner. C'est lui qui permet de trouver une suite de points ayant comme valeur d'adhérence un point fixe de  $f$ , valeur d'adhérence dont l'existence est garantie par la compacité de  $D$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, le disque unité fermé est homéomorphe au triangle  $\Delta$  de  $\mathbb{R}^3$  bâti sur les vecteurs de la base canonique  $e_1 = (1, 0, 0)$ ,  $e_2 = (0, 1, 0)$  et  $e_3 = (0, 0, 1)$ . Nous pouvons donc nous ramener au cas  $f : \Delta \rightarrow \Delta$ .

Avant d'énoncer le lemme de Sperner, disons quelques mots sur la notion de triangulation.

**Définition 50.** Soit  $T \subset \mathbb{R}^2$  un triangle fermé du plan.

1. On nomme *triangulation* de  $T$  un ensemble fini de triangles fermés plans d'intérieurs non vides et disjoints  $\mathcal{T} = \{T_1, \dots, T_n\}$ , dont l'union est exactement  $T$  et tel que chaque coté d'un  $T_k$  est partagé par au plus deux triangles de  $\mathcal{T}$  (dont  $T_k$ ). En particulier, un triangle peut partager ses sommets avec plusieurs triangles, mais ne partage ses cotés qu'avec au plus trois autres triangles de la triangulation.
2. Les *sommets*  $V$  de la triangulation sont les sommets des triangles  $T_k$  et les *arêtes*  $E$  de la triangulation sont les arêtes de ces triangles, définissant ainsi un graphe  $(V, E)$ .
3. Enfin, on note  $\delta(\mathcal{T})$  la longueur de l'arête la plus longue de la triangulation.

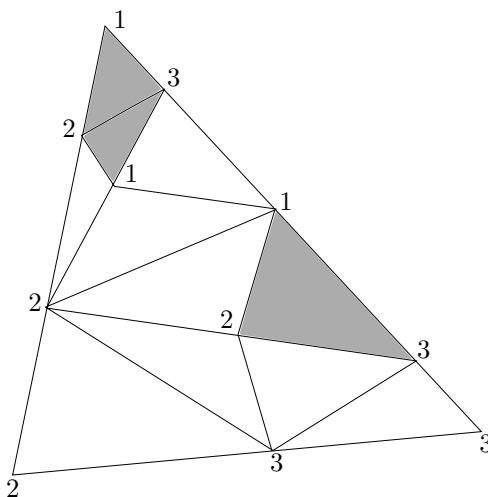


FIGURE 1 – Une coloration vérifiant le lemme de Sperner. Les triangles dont les sommets sont colorés de trois couleurs différentes sont grisés.

**Lemme 51** (de Sperner). Soit  $T$  un triangle fermé du plan bâti sur les sommets  $V_1, V_2$  et  $V_3$  et soit  $\mathcal{T}$  une triangulation de  $T$ . Munissons chaque sommet d'une



“couleur” choisie<sup>13</sup> dans l’ensemble  $\{1, 2, 3\}$  telle que (la figure 1 fournit un exemple d’une telle triangulation)

1. chaque  $V_i$  prend la couleur  $i$ , pour  $1 \leq i \leq 3$ ,
2. pour  $1 \leq i \neq j \leq 3$  et pour chaque sommet  $V$  élément du segment  $[V_i, V_j]$ , la couleur du sommet  $V$  est soit  $i$  soit  $j$ .

Alors il existe un triangle  $T' \in \mathcal{T}$  dont les sommets sont colorés de trois couleurs différentes.

*Preuve du lemme.* Nous allons montrer qu’en fait le nombre de triangles dont les sommets sont colorés de trois couleurs différentes est *impair* (donc non nul).

Considérons le nouveau graphe  $G = (V', E')$  suivant :

1. Les sommets de  $G$  sont  $V = \{T_1, \dots, T_n\} \cup \{\mathbb{R}^2 - T\}$ . Chaque face de la triangulation est une sommet de  $G$ , ainsi que la face “à l’extérieur”  $\mathbb{R}^2 - T$ .
2. Deux sommets de  $G$  sont reliés par une arête si et seulement si leur intersection est une arête de la triangulation dont les sommets portent les couleurs distinctes 1 et 2.

Le graphe  $G$  est représenté par la figure 2.

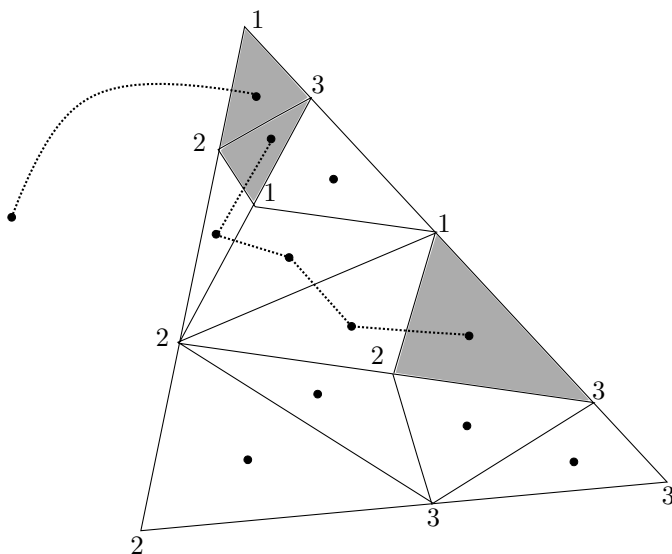


FIGURE 2 – Représentation du graphe  $G$ .

Aucun sommet intérieur de  $G$  (c’est à dire différent de  $\mathbb{R}^2 - T$ ) ne peut être de degré<sup>14</sup> 3 et les seuls sommets intérieurs de degré 1 sont les triangles dont les sommets sont colorés de trois couleurs différentes. Il s’ensuit que les seuls

13. Plus précisément, on se donne une application :  $V \rightarrow \{1, 2, 3\}$ .

14. Le degré d’un sommet est le nombre d’arêtes le reliant à d’autres sommets. Rappelons que, comme chaque triangle  $T \in \mathcal{T}$  partage ses cotés avec au plus trois autres triangles, les degrés des sommets de  $G$  sont majorés par 3.

sommets intérieurs de degré impair sont les triangles tricolores.

Cependant, le sommet “extérieur”  $\mathbb{R}^2 - T$  de  $G$  est nécessairement de degré impair. En effet, il ne peut y avoir qu’un nombre impair de changements entre 1 et 2 le long de l’arête  $[V_1, V_2]$  du triangle  $T$ .

Enfin, le nombre total de sommets de  $G$  de degrés impairs est nécessairement lui-même pair puisque,

$$2|E'| = \sum_{v \in V'} \deg(v). \quad (256)$$

(Cette relation traduit simplement le fait qu’une arête lie deux sommets.) Le nombre de triangles tricolores est donc nécessairement impair.  $\square$

Nous pouvons maintenant terminer la preuve du théorème de Brouwer. Nous voyons le triangle  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$  comme faisant partie du plan, isométrique à  $\mathbb{R}^2$ , qu’il engendre.

On considère une suite  $\mathcal{T}_1, \mathcal{T}_2, \mathcal{T}_3, \dots$  de triangulations de  $\Delta$  telle que, pour  $k \geq 1$ , la triangulation  $\mathcal{T}_{k+1}$  est la triangulation barycentrique de  $\mathcal{T}_k$  (voir la figure 3). Alors  $\delta(\mathcal{T}_k) \rightarrow 0$ .

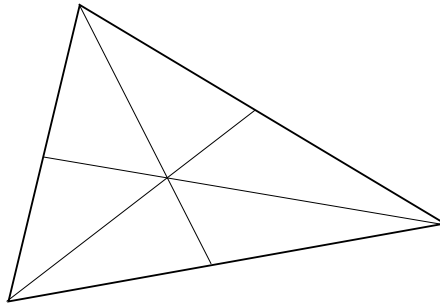


FIGURE 3 – La triangulation barycentrique d’un triangle.

Si l’une des arêtes de la triangulation  $\mathcal{T}_k$  est un point fixe de  $f$ , la preuve est terminée. Dans le cas contraire, pour chaque  $k \geq 1$ , nous définissons la coloration suivante : si  $v$  est un arête de la triangulation  $\mathcal{T}_k$ , on pose :

$$\lambda(v) = \min\{i, \quad f_i(v) < v_i\}, \quad (257)$$

où  $f_i(v)$  et  $v_i$  sont les  $i$ -ièmes coordonnées des vecteurs  $f(v)$  et  $v$ . Le nombre  $\lambda(v)$  est le plus petit indice  $i$  pour lequel la  $i$ -ième coordonnée de  $f(v) - v$  est strictement négative. Assurons nous que cette coloration est bien définie.

Tout d’abord, par choix de  $\Delta \subset \mathbb{R}^3$ , chaque  $x \in \Delta$  vérifie  $x_1 + x_2 + x_3 = 1$  et donc  $\sum_i (f_i(v) - v_i) = 0$ . Comme nous avons supposé qu’aucune des arêtes de la triangulation  $\mathcal{T}_k$  est un point fixe, cela implique que l’une au moins des coordonnées  $f_i(v) - v_i$  est strictement positive tandis qu’une autre au moins est strictement négative. La coloration  $\lambda$  est donc bien définie.

Vérifions que la coloration  $\lambda$  satisfait les hypothèses du lemme de Sperner. Tout d'abord, le sommet  $e_i$  de  $\Delta$  prend nécessairement la couleur  $i$  puisque  $i$  est la seule coordonnée négative de  $f(e_i) - e_i$ . De plus, si  $v$  est une arête de la triangulation qui se trouve sur le côté de  $\Delta$  opposé à  $e_i$ , alors  $v_i = 0$  et donc  $\lambda(v) \neq i$ .

Le lemme de Sperner assure que, pour chaque  $k \geq 1$ , il existe un triangle  $T_k \in \mathcal{T}_k$  "tricolore" dont les sommets  $a, b, c$  vérifient

$$\lambda(a_k) = 1, \quad \lambda(b_k) = 2, \quad \lambda(c_k) = 3. \quad (258)$$

C'est ici qu'intervient de façon cruciale la notion de compacité. Puisque  $\Delta$  est compact, la suite  $(a_k)$  de points admet une suite extraite convergente. Quitte à extraire, nous pouvons la supposer convergente de limite  $z \in \Delta$ . Montrons que  $z$  est un point fixe de  $f$ .

Comme  $\delta(\mathcal{T}_k) \rightarrow 0$ , on a aussi  $b_k \rightarrow z$  et  $c_k \rightarrow z$ . De plus, comme  $\lambda(a_k) = 1$ , on a  $f_1(a_k) < a_{k,1}$ . La continuité de  $f$  fournit alors  $f_1(z) \leq z_1$ . On montre de la même manière que  $f_2(z) \leq z_2$  et  $f_3(z) \leq z_3$ . Alors, la relation  $\sum_i (f_i(z) - z_i) = 0$  force  $f_i(z) = z_i$  et donc  $f(z) = z$ .  $\square$

*Remarque 52.* Le théorème de Brouwer s'inscrit dans une certaine opposition au théorème du point fixe de Picard-Banach. En effet, le théorème de Brouwer requiert une hypothèse topologique forte (la compacité et la convexité) sur l'ensemble sur lequel la fonction  $f$  agit et une hypothèse faible sur cette fonction (la continuité), alors que le théorème de Picard-Banach demande que  $f$  soit *contractante* alors que l'ensemble sur lequel elle agit n'a besoin que d'être complet.

*Remarque 53.* Le théorème de Brouwer reste vrai pour des compact convexes de  $\mathbb{R}^n$  avec  $n \geq 2$ .

## 16 Méthode d'optimisation d'Armijo

Ce paragraphe est inspiré d'un texte de "modélisation" utilisé à l'oral de calcul scientifique de l'agrégation.

On considère  $d \geq 1$  et une fonction  $f : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^1$  que l'on cherche à minimiser. Si  $f$  est  $C^1$  avec  $\nabla f$  localement Lipschitzienne, on peut utiliser une méthode de gradient à pas fixe

$$x_{n+1} = x_n - \alpha \nabla f(x_n), \quad (259)$$

qui converge dès que  $\alpha > 0$  est assez petit. L'ennui inhérent à cette méthode est que, sans information globale sur  $f$ , on ne sait pas à quel point le pas  $\alpha$  peut être petit, ce qui fait que la convergence est potentiellement très lente. La méthode d'Armijo est une descente de gradient à pas variable qui fournit une réponse partielle à ce problème, en ce qu'elle garantit, à chaque pas, une certaine décroissance.

Soit  $0 < \beta < 1$  un paramètre fixé et  $(\alpha_i(n))$  une suite de pas "initiaux", qui peuvent dépendre éventuellement de  $x_n$ . On considère encore une raison

$0 < r < 1$  fixée. La suite  $(x_n)$  est définie par récurrence de la manière suivante :

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n - \alpha_n \nabla f(x_n) \\ \alpha_n = \alpha_i(n) r^{k(n)} \\ k(n) = \min \left\{ k \in \mathbb{N}, f(x_n - \alpha_i(n) r^k \nabla f(x_n)) < f(x_n) - \beta \alpha_i(n) r^k |\nabla f(x_n)|^2 \right\}. \end{cases} \quad (260)$$

**Proposition 54.** *La méthode d'Armijo est bien définie dès que  $f$  est une fonction  $C^1$ . Plus précisément, pour tout  $x \in \mathbb{R}^d$ ,*

$$f(x - \alpha \nabla f(x)) - f(x) - \alpha \beta |\nabla f(x)|^2 < 0 \quad (261)$$

dès que  $\alpha > 0$  est assez petit.

*Démonstration.* C'est une conséquence simple de la formule de Taylor-Young qui fournit

$$f(x - \alpha \nabla f(x)) \underset{\alpha \rightarrow 0^+}{=} f(x) - \alpha |\nabla f(x)|^2 + o(\alpha), \quad (262)$$

d'où

$$f(x - \alpha \nabla f(x)) - f(x) - \alpha \beta |\nabla f(x)|^2 \underset{\alpha \rightarrow 0^+}{=} \alpha \left( (\beta - 1) |\nabla f(x)|^2 + o(1) \right), \quad (263)$$

ce qui est strictement négatif pour  $\alpha$  assez petit, en vertu du fait que  $\beta < 1$ .  $\square$

L'intérêt de la méthode d'Armijo réside dans le théorème suivant, qui fournit une sorte de "garantie" sur son comportement asymptotique.

**Théorème 55.** *Supposons, en plus des hypothèses précédentes, que  $\nabla f$  soit  $\gamma$ -lipschitzienne pour un certain  $\gamma > 0$ . Alors au moins l'un des deux énoncés suivants est vérifié :*

1.  $f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow 0^+} -\infty$ ,
2.  $\nabla f(x_n) \xrightarrow{n \rightarrow 0^+} 0$  (en fait, il apparaît clairement dans la démonstration que  $\nabla f(x_n) \in l^2(n \geq 0)$ , ce qui implique la convergence).

*Démonstration.* Supposons que le premier énoncé ne soit pas vérifié : la suite des  $f(x_n)$  est minorée. La condition

$$f(x_{n+1}) < f(x_n) - \beta \alpha_i(n) r^k |\nabla f(x_n)|^2 \quad (264)$$

force la suite des  $f(x_n)$  à être décroissante. Elle est donc convergente, ce qui implique, en utilisant à nouveau l'inégalité (264), que  $\alpha_n |\nabla f(x_n)|^2 \rightarrow 0^+$ . Pour arriver à nos fins, il suffit donc de montrer que les  $\alpha_n$  sont uniformément minorés.

Par définition de  $\alpha_n = \alpha_i(n) r^{k(n)}$ , le pas  $\alpha_n/r$  ne vérifie pas la condition (264), c'est à dire que

$$f\left(x_n - \frac{\alpha_n}{r} \nabla f(x_n)\right) \geq f(x_n) - \frac{\alpha_n}{r} \beta |\nabla f(x_n)|^2. \quad (265)$$

Une formule de Taylor à l'ordre zero donne

$$\begin{aligned} f\left(x_n - \frac{\alpha_n}{r} \nabla f(x_n)\right) \\ = f(x_n) + \int_0^1 \left\langle \nabla f\left(x_n - \frac{\alpha_n}{r} t \nabla f(x_n)\right) \middle| \frac{-\alpha_n}{r} \nabla f(x_n) \right\rangle dt \end{aligned} \quad (266)$$

et donc

$$\beta |\nabla f(x_n)|^2 \geq \int_0^1 \left\langle \nabla f \left( x_n - \frac{\alpha_n}{r} t \nabla f(x_n) \right) \middle| \nabla f(x_n) \right\rangle dt. \quad (267)$$

Comme  $\nabla f$  est  $\gamma$ -lipschitzienne, nous pouvons écrire

$$\left| \nabla f \left( x_n - \frac{\alpha_n}{r} t \nabla f(x_n) \right) - \nabla f(x_n) \right| \leq \gamma |\nabla f(x_n)| \frac{\alpha_n}{r} t, \quad (268)$$

ce qui permet d'approcher le produit scalaire dans l'intégrale de (267) par

$$\left\langle \nabla f \left( x_n - \frac{\alpha_n}{r} t \nabla f(x_n) \right) \middle| \nabla f(x_n) \right\rangle \quad (269)$$

$$= \left\langle \nabla f \left( x_n - \frac{\alpha_n}{r} t \nabla f(x_n) \right) - \nabla f(x_n) \middle| \nabla f(x_n) \right\rangle + |\nabla f(x_n)|^2 \quad (270)$$

$$\geq |\nabla f(x_n)|^2 - t |\nabla f(x_n)|^2 \gamma \frac{\alpha_n}{r} \quad (271)$$

$$= |\nabla f(x_n)|^2 \left( 1 - \frac{\gamma \alpha_n}{r} t \right). \quad (272)$$

En utilisant cette dernière inégalité dans (267), on trouve que, ou bien  $\nabla f(x_n) = 0$ , ce qui implique que la suite  $x_n$  est constante à partir du rang  $n$ , et cela termine la preuve, ou bien,

$$\beta \geq 1 - \frac{\gamma \alpha_n}{2r} \quad \text{soit encore} \quad \alpha_n \geq 2 \frac{r(1-\beta)}{\gamma}. \quad (273)$$

Ceci montre que les  $\alpha_n$  sont bien uniformément minorés. L'affirmation  $\nabla f(x_n) \in l^2$  découle de ce que l'on puisse sommer l'inégalité (264), obtenir une somme télescopique et en déduire :

$$f(x_0) - \beta \sum_{k=0}^n \alpha_k |\nabla f(x_k)|^2 > f(x_{n+1}) \geq \inf_p f(x_p) > -\infty. \quad (274)$$

Le fait que les  $\alpha_k$  soient uniformément minorés permet de conclure.  $\square$

## 17 Inégalités de Cheeger pour les graphes

Ce long développement a son origine du chapitre 3, pages 29-32, du livre [6] consacré au spectres de graphes. Je suis également très redevable à Bruno Colbois pour m'avoir initié aux problèmes de théorie spectrale géométrique qui ont inspiré ces quelques paragraphes.

On considère un graphe connexe fini non orienté  $G = (V, E)$  ne contenant aucune boucle simple, c'est à dire que  $\{i, i\} \notin E$  pour tout sommet  $i \in V$ .

**Définition 56** (Laplacien discret). Le *Laplacien discret*  $\Delta$  est la matrice  $M_{|V|}(\mathbb{R})$  associée à la forme quadratique

$$\forall x \in \mathbb{R}^V, \quad q(x) = \sum_{i \sim j} (x(i) - x(j))^2 \quad (275)$$

dans la base "canonique" de  $\mathbb{R}^V$ . Dans la somme précédente, on note  $i \sim j$  si deux sommets  $i, j \in V$  sont adjacents dans  $G$ . Chaque couple de sommets adjacents  $i \sim j$  est donc compté deux fois.

**Définition 57** (Constante de Cheeger). La constante de Cheeger de  $G$  est définie par

$$h(G) = \inf_A \frac{|\partial A|}{|A|}, \quad \text{où } \partial A = \left\{ e = \{i, j\} \in E, \quad i \in A \text{ et } j \notin A \right\}, \quad (276)$$

et où l'infimum porte sur toutes les parties  $A \subset V$  telles que  $|A| \leq \frac{1}{2}|V|$ .

La constante de Cheeger mesure à quel point il est possible de couper le graphe en deux morceaux reliés par un étroit passage. Si  $h(G) = |\partial A| |A|^{-1}$  est petite, alors il existe un découpage du graphe  $V = A \sqcup {}^c A$  tel que  $|A| \leq |{}^c A|$ , et tel que les deux parties soient reliés par un passage  $\partial A$  qui soit petit (relativement à  $|A|$ ).

Cette propriété peut représenter, par exemple, le point auquel les sommets du graphe sont "reliés" entre eux par des "lignes de communication" solides : si  $h(G)$  est faible, alors il suffit de bloquer un petit nombre d'arêtes, celles de  $\partial A$ , pour que le graphe ne soit plus connexe.

De façon alternative, on peut voir ce problème, comme la plus part des problèmes liés à un opérateur "Laplacien", du point de vue des transferts de chaleur. L'équation de la chaleur sur  $G$  se ramène à une EDO

$$u'(t) = \Delta u(t) \quad \text{avec} \quad u(0) = u_0 \in \mathbb{R}^V. \quad (277)$$

La répartition de température  $u(t)$  sur le graphe évolue suivant un processus "diffusif", c'est à dire que la température d'un point augmente ou diminue suivant l'écart de température avec les points adjacents. Dire que la constante de Cheeger est petite, c'est dire que le temps de relaxation de ce processus diffusif est grand. Si  $V = A \sqcup {}^c A$  avec  $\partial A$  relativement petit, alors on peut imaginer que la température initial  $u_0$  soit grande sur  $A$  et faible sur  ${}^c A$ . Comme les deux parties ne peuvent s'équilibrer que par des échanges impliquant une mince interface  $\partial A$ , on s'attend à ce le processus prenne longtemps à atteindre un équilibre  $u_0 = \text{cte}$ .

Cette intuition de la constante de Cheeger en termes de dynamique d'un système différentiel (277) indique que  $h(G)$  risque d'être lié aux valeurs propres de la matrice  $\Delta$ , et plus précisément à la plus petite valeur propre non nulle, qui dicte la vitesse de la dynamique. C'est ce que formalise le théorème suivant.

**Théorème 58.** *Avec les notations introduites précédemment, on note  $0 = \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots \leq \lambda_n$  le spectre de  $\Delta$  dont les éléments sont comptés avec multiplicités. Alors,*

$$\frac{h(G)^2}{2\kappa} \leq \lambda_2 \leq 2h(G), \quad \text{où } \kappa = \max \left\{ \deg(x), \quad x \in V \right\}. \quad (278)$$

*Démonstration.* On utilise le principe du min-max (de Courant-Fischer). Si  $A \in S_n(\mathbb{R})$  est une matrice symétrique ayant pour spectre  $\mu_1 \leq \mu_2 \leq \dots \leq \mu_n$  (les valeurs propres étant comptées avec multiplicités) alors

$$\mu_k = \min_{\dim(F)=k} \max_{x \in F - \{0\}} \frac{\langle Ax|x \rangle}{\|x\|^2}. \quad (279)$$

Dans ce qui précède, le maximum porte sur les sous-espaces  $F \subset \mathbb{R}^n$  de dimension  $k$ .

Tout d'abord, la matrice  $\Delta$  est évidemment positive avec  $(1, 1, \dots, 1) \in \ker(\Delta)$ , ce qui implique que  $\lambda_1 = 0$ .

Ensuite, on considère  $V = A \sqcup B$  une partition non triviale de l'ensemble des sommets, choisie de manière à ce que  $|A| \leq |B|$ . Posons

$$f(x) = \begin{cases} |B| := b & \text{si } x \in A, \\ -|A| := -a & \text{si } x \in B. \end{cases} \quad (280)$$

Alors  $f \perp (1, \dots, 1)$  si bien que, d'après le principe du min-max (279), on a

$$\lambda_2 \leq \frac{1}{\|f\|^2} \langle \Delta f | f \rangle = \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2}, \quad (281)$$

où  $df \in \mathbb{R}^V$  est un vecteur de norme

$$\|df\|^2 = \sum_{i \sim j} (f(i) - f(j))^2. \quad (282)$$

Un calcul direct montre que

$$\lambda_2 \leq \frac{\|df\|^2}{\|f\|^2} = \frac{|\partial A|(a+b)^2}{ab(a+b)} = \frac{|\partial A|}{|A|} \frac{a+b}{b} = \frac{|\partial A|}{|A|} \left(1 + \frac{a}{b}\right). \quad (283)$$

Puisque l'on a choisi notre partition de manière à ce que  $|A| \leq |B|$ , on obtient la première des deux inégalités :

$$\lambda_2 \leq 2h(G). \quad (284)$$

Montrons l'inégalité réciproque, qui est la plus difficile des deux. Soit  $f \in \mathbb{R}^V$  un vecteur propre unitaire de  $\Delta$  associé à la valeur propre  $\lambda_2$ . On considère l'ensemble de sommets suivant

$$A := \{f > 0\}. \quad (285)$$

Quitte à changer  $f$  en  $-f$ , on peut supposer que  $|A| \leq \frac{1}{2}|V|$ , ce qui rend  $A$  un ensemble admissible pour (279). On note  $f_1 = f^+$ , c'est à dire que  $f_1 = f$  sur  $A$  et  $f_1 = 0$  partout ailleurs. Posons encore

$$S = \sum_{i \sim j} |f_1(i)^2 - f_1(j)^2|. \quad (286)$$

L'inégalité de Cauchy-Schwarz fournit

$$S \leq \sqrt{\sum_{i \sim j} |f_1(i) - f_2(j)|^2} \sqrt{\sum_{i \sim j} |f_1(i) + f_2(j)|^2} \quad (287)$$

$$= \|df_1\| \sqrt{\sum_{i \sim j} |f_1(i) + f_2(j)|^2}. \quad (288)$$

Pour majorer le terme dans la racine<sup>15</sup>, on utilise l'inégalité  $(x+y)^2 \leq 2(x^2+y^2)$ . On obtient

$$S \leq \|df_1\| \sqrt{2 \sum_{i \sim j} (f_1(i)^2 + f_1(j)^2)} \leq \|df_1\| \sqrt{2\kappa} \|f_1\|. \quad (289)$$

---

15. Un grand merci à Benjamin Boutin pour son aide avec cette étape de la preuve!

Ensuite, on note  $0 = a_0 < a_1 < \dots < a_r$  les éléments de l'ensemble  $f_1^2(V)$ . Pour tout entier  $0 \leq l \leq r$ , on pose  $A_l = \{f_1^2 \geq l\}$ . Alors,

$$S = \sum_{i \sim j, f_1(i) > f_1(j)} (f_1(i)^2 - f_1(j)^2) = \sum (a_l - a_{l-1}), \quad (290)$$

où chaque terme  $a_l - a_{l-1}$  de la deuxième somme est compté autant de fois qu'il y a d'arêtes  $\{i, j\} \in E$  telles que  $f_1(i)^2 \geq a_l$  et  $f_1(j)^2 \leq a_{l-1}$ , c'est à dire exactement  $|\partial A_l|$  fois. On a donc

$$S = \sum_{l=1}^r |\partial A_l| (a_l - a_{l-1}). \quad (291)$$

Par définition de la constante de Cheeger, on a  $|\partial A_l| \geq |A_l| h(G)$ , puisque  $|A_l| \leq |A| \leq \frac{1}{2}|V|$ . Ainsi, on a une minoration, que l'on peut réarranger de la manière suivante

$$S \geq h(G) \sum_{l=1}^r (a_l - a_{l-1}) |A_l| \quad (292)$$

$$= h(G) \left\{ a_r |A_r| - a_{r-1} |A_r| + a_{r-1} |A_{r-1}| - a_{r-1} |A_{r-2}| + \dots \right\} \quad (293)$$

$$= h(G) \left\{ a_r |A_r| + a_{r-1} (|A_{r-1}| - |A_r|) + \dots \right\} \quad (294)$$

$$= h(G) \left\{ \sum_{f_1(i)^2 = a_r} f_1(i)^2 + \sum_{f_1(i)^2 = a_{r-1}} f_1(i)^2 + \dots \right\} \quad (295)$$

$$= h(G) \sum_{i \in V} f_1(i)^2 = h(G) \|f_1\|^2. \quad (296)$$

On combinant cette minoration de  $S$  avec la majoration (289), on obtient une nouvelle inégalité :

$$h(G) \|f_1\|^2 \leq S \leq \sqrt{2\kappa} \|df_1\| \|f_1\|, \quad (297)$$

d'où

$$\frac{1}{\sqrt{2\kappa}} h(G) \leq \frac{\|df_1\|}{\|f_1\|}. \quad (298)$$

Il nous reste à établir un lien entre  $f_1$  et la valeur propre  $\lambda_2$ , en utilisant le fait que  $f_1$  est un "morceau" de vecteur propre du Laplacien  $\Delta$ . On a encore

$$\sum_{i \sim j} (f_1(i)^2 - f_1(j)^2)^2 = \sum_{i \sim j} (f_1(i)^2 - 2f_1(i)f_1(j) + f_1(j)^2) \quad (299)$$

$$= 2 \sum_{i \in A} f_1(i) \sum_{j \sim i} (f_1(i) - f_1(j)). \quad (300)$$

Par ailleurs, si  $e_i$  est le vecteur de la base canonique de  $\mathbb{R}^V$  correspondant à l'arête  $i \in V$ , nous pouvons calculer, pour tout  $x \in \mathbb{R}^V$ ,

$$\langle e_i | \Delta x \rangle = \sum_{k \sim l} (\delta_{ik} - \delta_{il}) (x(k) - x(l)) \quad (301)$$

$$= - \sum_{k \sim i} (x(k) - x(i)) + \sum_{l \sim i} (x(i) - x(l)) \quad (302)$$

$$= 2 \sum_{k \sim i} (x(i) - x(k)). \quad (303)$$



A la lumière de cette identité, nous pouvons reformuler (300) de la manière suivante :

$$\langle f_1 | \Delta f_1 \rangle = 2 \sum_{i \in A} f_1(i) \sum_{j \sim i} (f_1(i)^2 - f_1(j)^2) \quad (304)$$

$$= 2 \sum_{i \in A} f(i) \sum_{j \sim i} (f(i)^2 - f(j)^2) \quad (305)$$

$$\leq 2 \sum_{i \in A} f(i) \sum_{j \sim i} (f(i)^2 - f(j)^2), \quad (306)$$

cette dernière inégalité découlant du fait que  $-f(j) \geq 0$  dès que  $j \notin A$ . En retraçant nos pas, nous obtenons

$$\langle f_1 | \Delta f_1 \rangle \leq \sum_{i \in A} f(i) \left( 2 \sum_{j \sim i} (f(i)^2 - f(j)^2) \right) \quad (307)$$

$$= \sum_{i \in A} f(i) \Delta f(i) = \lambda_2 \sum_{i \in A} f(i)^2 \quad (308)$$

$$= \lambda_2 \|f_1\|^2. \quad (309)$$

Ceci, avec l'inégalité (298), nous donne enfin le résultat attendu :

$$\frac{1}{2\kappa} h(G)^2 \leq \frac{\langle f_1 | \Delta f_1 \rangle}{\|f_1\|^2} \leq \lambda_2. \quad (310)$$

□

*Remarque 59.* Les inégalités de Cheeger ont d'abord été écrites pour étudier le spectre du Laplacien sur des domaines de  $\mathbb{R}^d$  ou des variétés Riemanniennes. Dans le cas d'une variété compacte sans bord, la démonstration des inégalités de Cheeger est fortement analogue à celle que nous venons d'exposer.

*Remarque 60.* La condition  $|A| \leq \frac{1}{2}|V|$  qui porte sur les parties  $A \subset V$  admissibles pour le calcul de la constante de Cheeger est absolument nécessaire. En effet, dans le cas où  $A$  couvre l'ensemble des sommets privé d'un singleton  $A = V - \{v_0\}$ , le quotient  $|\partial A|/|A| = \deg(v_0)(|V| - 1)^{-1}$  peut être très petit sans que cela soit significatif pour la géométrie de  $G$ .

*Remarque 61.* Si le graphe  $G$  n'est pas connexe, alors  $h(G) = 0$ . De manière plus générale, le nombre de composantes connexes de  $G$  est  $\dim \ker(\Delta)$ .

*Remarque 62.* Tout ce qui précède s'adapte sans mal au cas où le graphe  $G$  est muni d'un "bord", c'est à dire d'une partie  $V_0 \subset V$  sur laquelle de Laplacien discret est muni de "conditions de bord". Dans ce cas, le Laplacien de Dirichlet  $\Delta_D$  est défini comme étant la matrice de la restriction de la forme quadratique  $q$  à  $\mathbb{R}^{v-V_0}$ . La constante de Cheeger est modifiée en conséquence, on des inégalités similaires peuvent être établies (voir [6]).

## 18 Flots Hamiltoniens

Cette démonstration provient du cours de Philippe Chartier, portant sur les équations différentielles, donné (et reçu avec grand plaisir !) à l'*ENS Rennes* en 2015-2016.

Dans tout ce qui suit,  $d \geq 1$  est la dimension de l'espace "physique" et  $f : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$  est une fonction de classe  $C^1$  et globalement lipschitzienne. On note  $\phi_t(y)$  le flot de l'équation différentielle autonome

$$y' = f(y). \quad (311)$$

On notera  $df(y) = \frac{\partial f}{\partial y}(y)$  la différentielle d'une fonction de la variable  $y \in \mathbb{R}^{2d}$ .

**Définition 63** (Système Hamiltonien). On dit que le système différentiel (311) est *Hamiltonien* s'il existe une fonction  $H \in C^2(\mathbb{R}^{2d})$  telle que

$$\forall y \in \mathbb{R}^{2d} = J^{-1}\nabla H(y), \quad \text{où } J = \begin{pmatrix} 0 & -I_d \\ I_d & 0 \end{pmatrix}, \quad (312)$$

la matrice  $J$  étant donnée par blocs  $d \times d$ . La fonction  $H$  est l'*hamiltonien* du système.

Le système hamiltonien typique provient de la mécanique classique. Si  $q(t) \in \mathbb{R}^d$  est la position d'une particule (de masse unitaire) soumise à une force dérivant d'un potentiel  $V(q)$ , les équations du mouvement peuvent prendre la forme d'un système différentiel

$$\begin{cases} p' = -V(q) \\ q' = p, \end{cases} \quad (313)$$

ce qui est un système hamiltonien avec  $H(p, q) = \frac{1}{2}p^2 + V(q)$ . Les systèmes hamiltonien sont très agréables à étudier, tant dans la théorie que la pratique, puisqu'ils possèdent de nombreuses quantités conservées. Par exemple, dans tout système hamiltonien (312), la quantité  $H(y(t))$  est indépendante du temps.

**Définition 64.** Un application différentiable  $\phi : \mathbb{R}^{2d} \rightarrow \mathbb{R}^{2d}$  est dite symplectique si

$$\forall y \in \mathbb{R}^{2d}, \quad {}^t \left( \frac{\partial \phi}{\partial y}(y) \right) J \frac{\partial \phi}{\partial y}(y) = J. \quad (314)$$

La forme bilinéaire antisymétrique  $(p, q) \mapsto {}^t[p, q]J[p, q]$  est nommée forme symplectique.

Notons qu'une application symplectique  $\phi$  préserve le volume : si  $\phi$  est également un difféomorphisme, alors  $|U| = |\phi(U)|$  pour toute partie mesurable  $U \subset \mathbb{R}^d$ , en vertu du fait que le déterminant jacobien associé à  $U$  soit constamment égal à 1. Notons qu'on peut voir facilement qu'il en est de même du flot  $\phi_t$  d'un système hamiltonien, puisque  $\text{div}_y H = 0$ . Ce n'est pas un hasard.

**Théorème 65.** *Le système différentiel  $y' = f(y)$  est hamiltonien si et seulement si le flot  $\phi_t$  associé est symplectique pour chaque  $t \in \mathbb{R}^d$ .*

*Démonstration.* Supposons d'abord que le système  $y' = f(y)$  soit hamiltonien. Il existe  $H \in C^2(\mathbb{R}^{2d})$  telle que  $f = J^{-1}\nabla H$ .

[TRAVAIL EN COURS...]

□

## 19 Notations

**Fonctions périodiques :** on note  $\mathbb{U} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$  le cercle unité et, par exemple,  $L^2(\mathbb{U})$  l'espace des classes de fonctions  $\mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  qui sont  $2\pi$ -périodiques et intégrables sur  $[0, 2\pi]$ .

**Distributions :** on note  $\mathcal{D}(U)$  l'espace des fonctions test  $C^\infty$  à supports compacts sur un ouvert  $U \subset \mathbb{R}^d$ . On note  $\mathcal{D}'(U)$  l'espace des distributions associées. La classe de Schwartz est notée  $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$  et l'espace des distributions tempérées associé est noté  $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ .

**Ensembles :** si  $A$  et  $B$  sont des ensembles, on note  $B - A = \{b \in B, b \notin A\}$  la différence des ensembles.

**Intégration :** on note  $dx$  ou  $|\cdot|$  la mesure de Lebesgue sur  $\mathbb{R}$  munie de la tribu de Lebesgue<sup>16</sup> Sans d'avantage de précision, les intégrales sont toutes sur  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^d$ .

**Transformée de Fourier :** si  $f \in L^1(\mathbb{R})$ , on définit sa transformée de Fourier  $\mathcal{F}f = \hat{F} \in C^0(\mathbb{R})$  par

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \hat{f}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-ixt} dt. \quad (315)$$

**Matrices :** on note  ${}^t A$  la transposée d'une matrice  $A \in M_d(K)$  (ou de l'application linéaire associée dans la base canonique).

---

16. La tribu complétée de la tribu borélienne.

## Références

- [1] M. Aigner et G. M. Ziegler, *Proofs from THE BOOK*, 4<sup>e</sup> édition, Springer-Verlag, Berlin, 2013.
- [2] P. Billingsley, *Probability and measure*, 2nd édition, John Wiley & Sons, USA, 1986.
- [3] H. Brézis, *Analyse fonctionnelle, théorie et applications*, Mathématiques appliquées pour la maîtrise, 5<sup>e</sup> tirage, Masson, Paris, 1983.
- [4] D. Choimet et H. Queffélec, *Analyse mathématique, grands théorèmes du vingtième siècle*, Tableau Noir 104, Calvage et Mounet, Paris, 2009.
- [5] D. Choimet and H. Queffélec, *Twelve Landmarks of Twentieth-Century Analysis*, Cambridge University Press, 2015
- [6] Yves Colin de Verdière, *Spectres de graphes*, Cours spécialisés collection SMF 4. Société Mathématique de France, Paris, 1998.
- [7] Y. Coudene, *Traces, formes quadratiques et extensions de corps*, texte écrit pour l'Université de Rennes 1 en 2003, disponible sur internet à <http://agreg-maths.univ-rennes1.fr/documentation/docs/agreg-tr.pdf>
- [8] L. C. Evans : *Partial Differential Equations*. 2nd ed., Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, American Mathematical Society, Providence, USA, 2010.
- [9] G. H. Hardy, *Ramanujan*, Cambridge University Press, 1940.
- [10] D. Li et H. Queffélec, *Introduction à l'étude des espaces de Banach : Analyse et probabilités*, Cours spécialisés de la SMF 12, 2004.
- [11] W. Rudin, *Analyse réelle et complexe, cours et exercices* 3eme éd., Dunod, Paris, 1998.
- [12] C. de Séguins Pazzis, *Invitation aux formes quadratiques*, Mathématiques en devenir, Calvage et Mounet, Paris, 2011.
- [13] B. Simon, *Representations of Finite and Compact Groups*, Graduate Studies in Mathematics vol. 10, American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 1996.
- [14] E. M. Stein and R. Shakarchi, *Complex Analysis*, Princeton Lectures in Analysis vol. 2, Princeton University Press, Princeton New Jersey, 2003.
- [15] A. Zygmund, *Trigonometric Series, Volume I & II Combined*, 3ème édition, Cambridge Mathematical Library, Cambridge University Press, 2002.