Exercices de colles

Dimitri A. COBB

7 septembre 2020

Introduction

Ce document rassemble quelques exercices préparés pour des colles en MP* et PSI* au *Lycée du Parc* pour l'année 2018-2019. Les exercices sont de niveau variable, les plus simples étant très faciles et les plus durs pratiquement impossibles : à l'oral, un examinateur ne récompense pas tant la *résolution* d'un exercice que la *démarche* du candidat.

Avant de laisser le lecteur plonger dans la liste, il faut signaler que les exercices sont choisis suivant des critères pédagogiques non optimaux. En effet, les listes d'exercices de certains professeurs sont tellement complètes qu'il est parfois difficile de trouver de nouveaux exercices : il ne reste que les miettes qui tombent de la table...

Enfin, il me faut inciter à la prudence ! Il ne fait aucun doute que tout le document est copieusement parsemé d'erreurs. Si une chose semble idiote, cela veut probablement dire qu'il s'agit d'une idiotie.

Sur tout cela, je souhaite le meilleur au lecteur !

D.C.

Table des matières

1 Groupes

Exercice 1. Soit $n \geq 1$ et D_n le groupe diédral associé au polygone régulier à n cotés. Déterminer le cardinal du groupe $\mathrm{Aut}(D_n)$. Est-ce un groupe commutatif ?

Exercice 2.

1. Pour quels entiers $m, n \geq 1$ a-t-on un isomorphisme
$$\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z} \simeq \mathbb{Z}/m\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/n\mathbb{Z}\,?$$
2. Soit G un groupe et $H, K \subset G$ deux sous-groupes tels que
$$H \cap K = \{1\}, \quad \langle H, K\rangle = G, \quad (hk = kh \text{ pour } h \in H, k \in K).$$
Montrer que les groupes G et $H \times K$ sont isomorphes.

Exercice 3. Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Montrer que le groupe $(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^\times$ est cyclique. En est-il toujours de même de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^\times$ avec n non nécessairement premier ?

Exercice 4. Déterminer tous les sous-groupes de $\mathfrak{S}_3$ et $\mathfrak{S}_4$.

Exercice 5. Soit $C = \{(\pm 1, \pm 1, \pm 1)\}$ un cube dont on note $\mathrm{Isom}^+(C)$ le groupe des isométries de déterminant 1. Montrer que $\mathrm{Isom}^+(C) \simeq \mathfrak{S}_4$.

Exercice 6. Soit $p \geq 3$ un nombre premier et G un groupe de cardinal $2p$. Montrer que G est isomorphe ou bien à $\mathbb{Z}/2p\mathbb{Z}$ ou bien au groupe diédral D_p.

Exercice 7. Soit $n \geq 1$. Pour $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on note $u_\sigma = (\delta_{\sigma(i),j})_{i,j}$ la matrice de permutation associée. Quelles sont les matrices qui commutent avec toutes les matrices u_σ ?

Exercice 8. Soit $n \geq 2$ et $\tau \in \mathfrak{S}_n$ une permutation d'ordre 2 : $\tau^2 = \mathrm{id}$. Dénombrer le centralisateur de τ
$$Z(\tau) = \{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma\tau = \tau\sigma\}\,.$$

2 Dénombrement, bornes supérieures et inférieures

Exercice 9.

1. On considère $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction croissante. Montrer que f est continue sauf en un nombre au plus dénombrable de points.
2. Soit $A \subset [0,1]$ une partie au plus dénombrable. Existe-t-il une fonction croissante continue exactement sur $[0,1] - A$?

Exercice 10. Montrer que les ensembles $\mathbb{R} - \mathbb{N}$, $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ et $C^0(\mathbb{R})$ sont équipotents à $\mathbb{R}$.

Exercice 11. Soit $f : [0,1] \longrightarrow [0,1]$ une fonction croissante. Montrer qu'il existe un $x \in [0,1]$ tel que $f(x) = x$.

Exercice 12. Soit I un ensemble et $f : I \longrightarrow \mathbb{R}_+$ un application telle que, pour toute partie finie $J \subset I$,
$$\sum_{j \in J} f(j) \leq 1.$$
Montrer que le support de f est au plus dénombrable.

Exercice 13. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie dénombrable. Montrer qu'il existe une droite D passant par 0 telle que $D \cap A = \emptyset$.

Exercice 14. L'ensemble $\mathfrak{S}(\mathbb{N})$ est-il dénombrable ?

Exercice 15. Soit $p \geq 2$ premier. Les ensembles $\mathbb{F}_p[X]$ et $\mathbb{Z}[X]$ sont-ils dénombrables ?

3 Probabilités

Exercice 16. On jette deux dés non pipés et on considère les événements suivants :

— "Le premier dé tombe sur un numéro pair" : A

— "Le deuxième dé tombe sur un numéro impair" : B

— "La somme des nombres affichés sur les dés est paire" : C

Etudier l'indépendance mutuelle et deux à deux des événements A, B et C.

Exercice 17 (Inégalité maximale de Kolmogorov)**.** Soit $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ un espace de probabilité et $\epsilon > 0$. On considère $n \geq 1$ et $X_1, X_2, ..., X_n \in L^2(\Omega)$ des variables aléatoires centrées mutuellement indépendantes. On pose $S_k = X_1 + \cdots + X_k$ et

$$A_k = (|S_1| < \epsilon) \cap \cdots (|S_{k-1}| < \epsilon) \cap (|S_k| \geq \epsilon).$$

1. Montrer que

$$\mathbb{E}(S_n^2) \geq \sum_{k=1}^{n} \mathbb{E}\left[\mathbb{1}_{A_k}(S_k^2 + 2S_k(S_n - S_k))\right].$$

2. En déduire que

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq k \leq n} \left|\sum_{j=1}^{k} X_k\right| \geq \epsilon\right) \leq \frac{1}{\epsilon^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}(X_k).$$

Exercice 18. Que dire d'une variable aléatoire indépendante d'elle même ?

Exercice 19 (Non Stop)**.** On considère un avion de $n \geq 1$ places et autant de passager ayant sa place attribuée. Le premier passager, un être malicieux, décide de ne pas respecter la consigne et de choisir un place au hazard. Les autres passager s'installent un par un de la manière suivante :

— ou bien la place du passager et libre et il s'y installe.,

— ou bien la place est occupée et le passager choisit une place au hazard parmi les places restantes.

Quelle est la probabilité que la n-ième passager soit à sa place ?

Exercice 20 (Inégalités de Khintchine)**.** On considère $X_1, ..., X_n : \Omega \longrightarrow \{\pm 1\}$ des variables aléatoires indépendantes de même loi de Rademacher de paramètre $1/2$ sur un même espace de probabilité.

1. Démontrer que pour $p = 2q$ pair et $a_1, ..., a_n, \in \mathbb{R}$, si $X = a_1 X_1 + \cdots + a_n X_n$,

$$\|X\|_{L^p} \leq \sqrt{\frac{p}{2}} \|X\|_{L^2}.$$

2. A-t-on encore la même inégalité si les a_k sont des nombres complexes ?
3. Montrer que
$$\|X\|_{L^2} \leq 2\|X\|_{L^1}.$$
4. On ne suppose plus p entier (pair). Montrer que
$$\|X\|_{L^p} \leq \sqrt{p}\|X\|_{L^2}.$$

Exercice 21. On considère X une variable aléatoire discrète et $a \geq 0$, $b \neq 0$ tels que $X \sim aX + b$. Montrer que X est presque sûrement constante.

4 Topologie

Exercice 22. Soit (a_n) et (b_n) deux suites de points de $[0,1]$ dont les images sont denses. Pour $f \in C^0[0,1]$, on pose
$$\|f\|_a = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}|f(a_n)|$$
et on définit $\|f\|_b$ de la même façon.

1. Donner une condition nécessaire et suffisante sur a pour que $\| \,.\, \|_a$ définisse bien une norme sur $C^0[0,1]$.
2. Si les images des suites (a_n) et (b_n) sont distinctes, montrer que les normes $\| \,.\, \|_a$ et $\| \,.\, \|_b$ ne sont pas équivalentes.

Exercice 23. Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue ayant un point fixe $l \in \mathbb{R}$. On suppose que f est dérivable en l et que $|f'(l)| < 1$. Montrer que le bassin d'attraction
$$\mathcal{A} = \left\{ x \in \mathbb{R}, \quad f^n(x) \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} l \right\}$$
est un ouvert de $\mathbb{R}$.

Exercice 24. On munit $C^0([0,1],[0,1])$ de la norme uniforme.

1. L'ensemble des fonctions continues surjectives est-il fermé ?
2. Quelle est l'adhérence de l'ensemble des fonctions bijectives ?

Exercice 25. Trouver tous les sous-groupes ouverts de $\mathbb{C}^\times$. Quels sont les sous-groupes fermés bornés ?

Exercice 26. On considère la $\mathbb{R}$-algèbre des fonctions réelles continues (pour le produit point par point) que l'on munit de la norme uniforme $\| \,.\, \|_\infty$. L'ensemble des éléments inversibles est-il ouvert ? dense ? fermé ? Quel est son intérieur ? Son adhérence ? Reprendre ces questions avec la norme $\| \,.\, \|_2$.

Exercice 27. On considère $\| \,.\, \|$ une norme sur $M_n(\mathbb{R})$ constante sur les classes de similitude. Que dire ?

Exercice 28. On munit $\mathbb{R}[X]$ de la norme suivante :
$$\forall P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k \in \mathbb{R}[X], \quad \|P\| = \max_{0 \leq k \leq n} |a_k|$$

1. Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires est fermé.
2. Montrer que l'ensemble des polynômes unitaires scindés est fermé.

5 Réduction

Exercice 29. Soit $n \geq 1$ et $A \in M_n(\mathbb{C})$. À quelle condition $\exp(A)$ est-elle diagonalisable ?

Exercice 30. Soit $m, n \geq 1$. Déterminer tous les morphismes de groupes $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \longrightarrow GL_m(\mathbb{C})$.

Exercice 31. Soit $A, B \in M_n(\mathbb{C})$. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que $\mathrm{Tr}(A^k) = \mathrm{Tr}(B^k)$ pour tout $k \geq 0$.

Exercice 32. Soit K un corps et E un K-espace vectoriel de dimension finie. On considère $P \in K[X]$ un polynôme annulateur de $f \in \mathcal{L}(E)$ tel que $P(0) = 0$ et $P'(0) \neq 0$. Montrer que

$$E = \mathrm{Im}(f) \oplus \ker(f).$$

Exercice 33. On considère V un $\mathbb{C}$-espace vectoriel de dimension finie, dont on note V' le dual, et G un groupe fini. Soit $\rho : G \longrightarrow GL(V)$ un morphisme de groupes. Pour $g \in G$, on définit un élément $\rho'(g)$ de $GL(V')$ en posant

$$\forall \phi \in V', \quad \rho'(g)(\phi) = \phi \circ \rho(g)^{-1}.$$

Montrer que $\mathrm{Tr}\left[\rho(g)\right] = \overline{\mathrm{Tr}\left[\rho'(g)\right]}$.

Exercice 34. On considère $M \in M_2(\mathbb{C})$ et on pose

$$F = \left\{A \in M_2(\mathbb{C}), \quad AM = MA\right\}.$$

Montrer que F ne peut-être de dimension impaire.

Exercice 35. Soit $G \subset GL_n(\mathbb{C})$ une partie finie stable par produit. Montrer que

$$\sum_{g \in G} \mathrm{Tr}(g) \in |G|\mathbb{Z}.$$

Exercice 36. Soit $n \geq 1$, G un groupe commutatif, $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact convexe non vide et $\rho : G \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ un morphisme de groupes. On suppose que K est G-stable, c'est à dire que

$$\forall g \in G, \quad \rho(g)(K) \subset K$$

Montrer qu'il existe $x \in K$ tel que $\rho(g)x = x$ pour tout $g \in G$.

6 Algèbre linéaire

Exercice 37. Soit K un corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension finie non nulle. On considère $u : E \longrightarrow E$ un endomorphisme nilpotent et $S \subset E$ un sous-espace vectoriel stable par u tel que $E = S + \mathrm{Im}(u)$. Montrer que $S = E$.

Exercice 38. Calculer, pour $r \in \mathbb{R}$,

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} r & 1 & 1 & \cdots & & 1 \\ 1 & r & 1 & \cdots & & 1 \\ \vdots & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & & \\ \vdots & & & \ddots & & \vdots \\ 1 & 1 & \cdots & & r & 1 \\ 1 & 1 & \cdots & & 1 & r \end{vmatrix}$$

où la matrice est de taille $n \times n$.

Exercice 39. Soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie et $p, q : E \longrightarrow E$ deux projecteurs de E. À quelle condition a-t-on $pq = qp$?

Exercice 40. Soit K un corps, E un K-espace vectoriel de dimension finie et $f : E \longrightarrow E$ un endomorphisme linéaire. Calculer

$$\dim \{g \in \mathcal{L}(E), \quad gf = fg = 0\}.$$

Exercice 41. Soit K un corps commutatif et $\phi : M_n(K) \longrightarrow K$ une forme linéaire multiplicative. Que dire ?

Exercice 42. On considère $D : C^\infty(\mathbb{R}) \longrightarrow C^\infty(\mathbb{R})$ l'opérateur de dérivation. Etudier l'existence de $f \in \mathcal{L}(C^\infty(\mathbb{R}))$ tel que $f^2 = D$.

Exercice 43. Soit $n \geq 1$, K un corps commutatif et $A, B \in M_n(K)$. Montrer que $\mathrm{Sp}(AB) = \mathrm{Sp}(BA)$

Exercice 44. Soit K un corps commutatif et E un K-espace vectoriel de dimension $n \geq 1$. On considère $f \in \mathcal{L}(E)$. On suppose qu'il existe $a \in E$ tel la famille $(f(a), ..., f^n(a))$ soit une base de E.

1. Montrer que f est inversible.
2. Montrer qu'il existe des uniques coefficients $a_1, ..., a_n \in K$ tels que

$$\mathrm{id}_E = \sum_{k=1}^{n} a_k f^k$$

3. Calculez f^{-1}.
4. Soit $g \in \mathcal{L}(E)$. Montrer que $fg = gf$ si et seulement si $g \in K[f]$.

Exercice 45. On considère $m, n \geq 1$. Trouver tous les morphismes de groupes $GL_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{Z}/m\mathbb{Z}$.

7 Compacité

Exercice 46. Soit $n \geq 1$ et $G \subset O_n(\mathbb{R})$ un groupe dont l'image par la trace est finie. Montrer que G est fini.

Exercice 47. Soit $n \geq 1$ et $G \subset GL_n(\mathbb{R})$ un sous-groupe compact tel que $O_n(\mathbb{R}) \subset G$. Montrer que $G = O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 48. On considère $n \geq 1$ et on munit $\mathbb{R}^n$ de la norme $\|\,.\,\|_\infty$. Soit $X \subset \mathbb{R}^n$. On note

$$K(X) = \{A \in M_n(\mathbb{R}), \quad A(X) \subset X\}.$$

1. On suppose X compact. À quelle condition $K(X)$ est-il compact ?
2. Si $K(X)$ est fermé, X est-il nécessairement fermé ?

8 Séries

Exercice 49.

1. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^x}{x^x}\mathrm{d}x < +\infty.$$

2. Montrer que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}} < +\infty.$$

3. Montrer que

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln \ln n}} = +\infty.$$

Exercice 50. Dans cet exercice, on note $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, ...\}$ l'ensemble des nombres premiers et $\mathcal{P}_n = \{p \in \mathcal{P}, p \leq n\}$.

1. Montrer que

$$\prod_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{1 - p^{-1}} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

2. Montrer que

$$\sum_{p \in \mathcal{P}_n} \frac{1}{p} \underset{n \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty.$$

Exercice 51. On considère une suite décroissante de nombres positifs (a_n) telle que la série $\sum a_n$ converge.

1. Montrer que $a_n = O\left(\frac{1}{n}\right)$.
2. Montrer que $a_n = o\left(\frac{1}{n}\right)$. (Indication : on a $S_{2n} - S_n \to 0$).

Exercice 52. Pour quels $x \geq 0$ le produit $\prod_k \frac{1}{1 - x^k}$ admet-il une limite finie ?

Exercice 53. On considère $\sigma : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ une bijection. Etudier la nature des séries :

1. $\sum \frac{1}{n\sigma(n)}$. (indication $2ab \leq a^2 + b^2$).
2. $\sum \frac{\sigma(n)}{n^2}$.
3. $\sum \frac{\sigma(n)}{n^3}$.

Exercice 54. On pose, pour $n \geq 1$,

$$a_n = \prod_{k=1}^{n} \left(1 + \frac{(-1)^{k+1}}{\sqrt{n}}\right).$$

1. Montrer que $a_n \to 0$.
2. Montrer que $a_n \sim c/\sqrt{n}$ pour une certaine constante $c > 0$.

Exercice 55. On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application telle que pour toute série réelle convergente $\sum u_n$, la série $\sum f(u_n)$ converge. Que dire de f ?

Exercice 56 (Formule d'inversion de Möbius)**.**

1. Montrer que, pour $x > 1$,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x} = \prod_{p \in \mathcal{P}} \frac{1}{1 - p^{-x}},$$

où $\mathcal{P} = \{2, 3, 5, 7, ...\}$ est l'ensemble des nombres premiers.

2. Montrer que l'on peut écrire, pour $x > 1$,

$$\frac{1}{\zeta(x)} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\mu(n)}{n^x}$$

où les $\mu(n)$ sont à déterminer.

3. Soit $(a_n) \in l^{\infty}(n \geq 1)$. On pose

$$A_n = \sum_{d|n} a_d.$$

Exprimer a_n en fonction des A_d.

Exercice 57. Calculer, pour $z \in \mathbb{C}$ convenable,

$$\sum_{n \geq 0} \frac{z^{2^n}}{1 - z^{2^{n+1}}}.$$

Exercice 58. On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que, pour toute série réelle convergente $\sum a_n$, la série $\sum f(a_n)$ soit également convergente. Que dire ?

9 Suites et séries de fonctions

Exercice 59. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$ convenable,

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$$

1. Etudier la convergence simple, uniforme, etc.
2. Etudier les limites de $\zeta(x)$ pour $x \to +\infty$ et pour $x \to 1^-$.
3. Donner un développement limité de $\zeta(x)$ pour $x \to 1^-$.

Exercice 60. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$

$$W(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\exp(i2^n x)}{2^n}.$$

Etudier la convergence de la série puis la dérivabilité de W en 0.

Exercice 61. Étudier la série $\sum \frac{e^{inx}}{n}$: convergence simple, uniforme, limite...

Exercice 62. On considère $f_0 \in C^1(\mathbb{R}_+)$ et

$$f_{n+1}(x) = \int_0^x f_n(t)\mathrm{d}t.$$

Etudier la série $\sum f_n$: convergence simple, uniforme, limite...

Indication : pour calculer la limite de la série, on pourra utiliser une formule de Taylor.

Exercice 63. On pose, pour $x \in \mathbb{R}$

$$W(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f(10^n x)}{10^n}$$

où $f(x) = \mathrm{dist}(x, \mathbb{Z})$. Montrer que W n'est dérivable en aucun point de $\mathbb{R}$.

10 Séries entières

Exercice 64 (Partitions d'entiers)**.** Pour $n \geq 1$, on note $p(n)$ le nombre de partitions de n en entiers plus petits, c'est à dire le nombre de moyens d'écrire n comme une somme d'entiers plus petits (et pas forcément distincts).

$$p(n) = \mathrm{Card}\left\{(j_1, j_2, ...) \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}^*}, \quad n = \sum_{k=1}^{\infty} k j_k\right\}.$$

Par exemple, $5 = 5 = 4+1 = 3+2 = 3+1+1 = 2+2+1 = 2+1+1+1 = 1+1+1+1+1$ si bien que $p(5) = 7$. Par convention, $p(0) = 1$.

1. Montrer que la série génératrice $\sum p(n)x^n$ associée à la suite des partitions vaut, pour $0 \leq x < 1$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

2. Montrer que, pour $0 < x < 1$,

$$\ln F(x) \leq \frac{\pi^2}{6}\frac{x}{1-x}.$$

Montrer que, pour $n \geq 0$,

$$p(n) \leq \frac{1}{x^n}\exp\left(\frac{\pi^2}{6}\frac{x}{1-x}\right).$$

3. En posant $x = e^{-t}$ avec $t > 0$, montrer que

$$p(n) \leq \exp\left(\pi\sqrt{\frac{2}{3}n}\right).$$

Exercice 65 (Partitions d'entiers, bis)**.** Soit $I \subset \mathbb{N}$. On note $p_I(n)$ le nombre de partitions de $n \geq 1$ en atomes dans I, c'est à dire le nombre de moyens de décomposer n comme une somme d'éléments de I (pas forcément distincts).

$$p_I(n) = \mathrm{Card}\left\{\phi : I \longrightarrow \mathbb{N}, \quad n = \sum_{k \in I} \phi(k)k\right\}$$

Par convention, $p_I(0) = 1$ et si $I = \mathbb{N}$, on notera $p_{\mathbb{N}}(n) = p(n)$.

1. Montrer que la série génératrice $\sum p(n)x^n$ associée à la suite des partitions vaut, pour $0 \leq x < 1$,

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} p(n)x^n = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{1}{1-x^k}.$$

2. Si $I = 2\mathbb{N}$ est l'ensemble de entiers pairs, on note $p_I(n) = p_e(n)$ et si $I = 2\mathbb{N}+1$ est l'ensemble des entiers impairs, on note $p_I(n) = p_o(n)$. Montrer que, pour $0 \leq x < 1$,

$$\sum_{n=0}^{\infty} p_o(n) = \prod_{k=1}^{\infty}(1+x^k)$$

3. En déduire que $p_o(n)$ égal à $p_d(n)$, le nombre de partitions de n en atomes distincts :

$$p_d(n) = \mathrm{Card}\left\{(\epsilon_1, \epsilon_2, ...) \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}, \quad n = \sum_{k=1}^{\infty} \epsilon_k k\right\}.$$

Exercice 66. Déterminer les fonctions x développables en série entière au voisinages de 0 telles que

$$x'(t) = \frac{t^2}{x(t)} - 1 \quad \text{et} \quad x(0) = 0.$$

Exercice 67. En utilisant des méthodes de séries entières, donner une majoration non triviale de

$$\mathrm{Card}\left\{\sigma \in \mathfrak{S}_n, \quad \sigma^2 = \mathrm{id}\right\}.$$

11 Calcul intégral

Exercice 68. Etudier la convergence de l'intégrale

$$\int_0^{+\infty} x\sin(x^3+x)\mathrm{d}x.$$

Exercice 69. Déterminer la limite de

$$\sum_{k=1}^{n} \sin\left(\frac{k}{n}\right)\sin\left(\frac{k}{n^2}\right)$$

lorsque $n \to +\infty$.

Exercice 70. Déterminer un équivalent pour $n \to +\infty$ de

$$\int_0^{+\infty} \frac{e^{-nt}}{\ln(1-e^{-t})} \mathrm{d}t.$$

Exercice 71. Déterminer la limite pour $p \to 0^+$ de

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin(t)}{t} e^{-pt} \mathrm{d}t.$$

Exercice 72 (Méthode de Laplace)**.** On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction C^∞ ayant un minimum strict en 0 et telle que $f''(0) \neq 0$. Déterminer un équivalent pour $t \to +\infty$ de

$$\int_{-1}^{1} \exp\left(-F(s)t\right) \mathrm{d}s.$$

Exercice 73. On considère une fonction continue $f : [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f(1) \neq 0$. Déterminer un équivalent pour $n \to +\infty$ de

$$\int_0^1 f(t) t^n \mathrm{d}t.$$

Exercice 74 (Théorème des phases de Salem)**.** On considère $\rho_1, ..., \rho_N > 0$ et on pose, pour $t \in \mathbb{R}$ et $x = (x_1, ..., x_N) \in \mathbb{R}^N$,

$$f(x,t) = f_x(t) = \sum_{k=1}^{N} \rho_k \cos(kt + x_k).$$

On se munit encore de $p \geq 2$ un entier pair.

1. Soit
$$F(x) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(x,t)^p \mathrm{d}t$$
et $\psi \in \mathbb{R}^N$ un minimum global de F. Montrer que
$$F(\psi) \leq (p-1) \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{N} \rho_k^2 \right) \int_0^{2\pi} f(x,t)^{p-2} \mathrm{d}t.$$
Indication : $\partial_k^2 F(\psi) \geq 0$.
2. On pose, pour $q \geq 1$ et $h : [0, 2\pi] \longrightarrow \mathbb{R}$ continue
$$\|h\|_q = \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |h(t)|^q \mathrm{d}t \right)^{1/q}.$$
Montrer que
$$\|f_\psi\|_p \leq \sqrt{p-1} \left(\sum_{k=1}^{N} \rho_k^2 \right)^{1/2}.$$
Note : on pourra éventuellement admettre l'inégalité de Hölder si elle n'est pas connue.

3. Soit $g(t) = \sum_{-M}^{M} a_k e^{ikt}$ un polynôme trigonométrique. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que

$$\|g'\|_\infty \leq CM^{3/2}\|g\|_\infty.$$

4. Soit $t_0 \in \mathbb{R}$ tel que $\|f_\psi(t_0)| = \|f_\psi\|_\infty$. Montrer que

$$\big||f_\psi(t)| - \|f_\psi\|_\infty\big| \leq C(2N)^{3/2}\|f_\psi\|_\infty |t - t_0|$$

et en déduire que, pour une certaine constante numérique $C' > 0$,

$$2(C'N)^{3/(2p)}\|f_\psi\|_p \geq \|f_\psi\|_\infty.$$

5. En utilisant les résultats des questions 2. et 4. montrer le *théorème des phases de Salem* : il existe des phases $\psi_1, ..., \psi_N \in \mathbb{R}$ telles que

$$\|f_\psi\|_\infty \leq Cte\sqrt{\log(N)} \left(\sum_{k=1}^{N} \rho_k^2\right)^{1/2}.$$

Indication : on pourra faire une choix judicieux de p.

12 Autoadjonction

Exercice 75 (Principe du min-max de Courant-Fischer)**.** Soit $n \geq 1$ et $A \in S_n(\mathbb{R})$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel $\langle\,.\,|\,.\,\rangle$ et on note $\lambda_1(A) \leq \cdots \leq \lambda_n(A)$ les valeurs propres de A classées par ordre croissant.

1. Montrer que

$$\lambda_k(A) = \min_{\dim E = k} \max_{x \in E - \{0\}} \frac{\langle Ax|x\rangle}{\|x\|^2}.$$

où le minimum est pris sur les sous-espaces $E \subset \mathbb{R}^n$ de dimension k.

2. En déduire que les applications

$$\lambda_k : \begin{array}{l} S_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ A \longmapsto \lambda_k(A) \end{array}$$

sont 1-lipschitziennes.

Exercice 76 (Méthode de Richardson)**.** Soit $n \geq 1$, $A \in GL_n(\mathbb{R})$ et $b \in \mathbb{R}^n$. On cherche à inverser le système $Ax = b$ par une méthode numérique. Pour cela, on pose $A = M - N$ avec M "facilement" inversible et on considère la suite suivante : $x_0 \in \mathbb{R}^n$ est fixé arbitrairement et

$$x_{n+1} = M^{-1}Nx_n + M^{-1}b.$$

1. À quelle condition a-t-on $x_n \longrightarrow x$?
2. On suppose $A \in S_n^{++}(\mathbb{R})$. On choisit $M = \frac{1}{\alpha} I_n$ avec $\alpha > 0$. Étudier la convergence de (x_n). Quel est est le α optimal en termes de convergence ?

Exercice 77. Soit $u : C^0[0,1] \longrightarrow C^0[0,1]$ un endomorphisme symétrique positif continu pour le produit préhilbertien usuel. On suppose que $u(\mathbb{R}_n[X]) \subset \mathbb{R}_n[X]$ pour tout $n \geq 0$. Montrer l'existence d'une famille de polynômes $P_0, P_1, ... \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\forall f \in C^0[0,1], \quad u(f) = \sum_{k=0}^{\infty} \langle P_k, f\rangle P_n.$$

Exercice 78 (Une inégalité de Cheeger)**.** On considère $G = (V, E)$ un graphe connexe non orienté, dont l'ensemble des sommets est V et l'ensemble des arêtes est E. On définit d'une part le laplacien sur G par la forme quadratique

$$\forall x \in \mathbb{R}^G, \quad {}^t x \Delta x = \sum_{(i,j)\in E} (x(i) - x(j))^2,$$

et d'autre part la *constante de Cheeger* de G par

$$h(G) = \min \left\{ \frac{|\partial A|}{|A|}, \quad A \subset V, 1 \leq |A| \leq \frac{1}{2}|V| \right\}$$

où le bord de $A \subset V$ est défini comme étant l'ensemble des arêtes liant un point de A et un point de ${}^c A$.

Montrer que $\lambda_1(G)$, la plus petite valeur propre non nulle de Δ, vérifie l'inégalité

$$\lambda_1(G) \leq h(G).$$

13 Espaces préhilbertiens

Exercice 79. Soit $A \subset [0, +\infty[$ une partie dense et $n \geq 2$. On munit $\mathbb{R}^n$ du produit scalaire usuel et on considère $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ telle que $\|f(x) - f(y)\| = \|x - y\|$ dès que $\|x - y\| \in A$.

1. Montrer que f est une isométrie.
2. On suppose désormais que $n = 1$. La fonction f est-elle nécessairement une isométrie ?

Exercice 80 (Quadrature Gauβienne)**.** On munit $\mathbb{R}[X]$ du produit scalaire suivant :

$$\forall P, Q \in \mathbb{R}[X], \quad \langle P|Q\rangle = \int_0^1 PQ.$$

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a_0, a_1, ..., a_n \in [0,1]$ deux à deux distincts. On cherche à approcher l'intégrale $\int_0^1 P$ par une formule (de quadrature) du type

$$\int_0^1 P \approx I(P) := \sum_{k=0}^{n} b_k P(a_k).$$

1. On suppose les a_k fixés. Donner une condition nécessaire et suffisante sur les b_k pour que la formule soit exacte sur les polynômes de degré au plus n.

2. On note $U_0, U_1, U_2, ...$ l'orthonormalisée de Gram-Schmidt de la base canonique de $\mathbb{R}[X]$. Montrer que le polynôme U_n a n racines distinctes dans $]0,1[$.
3. On suppose que les $a_0, ..., a_n$ sont les $n+1$ racines de U_{n+1}. Montrer que, pour un bon choix de b_k, la formule de quadrature est exacte jusqu'à l'ordre $2n+1$.
4. Réciproquement, montrer que si la quadrature est exacte jusqu'à l'ordre $2n+1$ alors les a_k sont les racines de U_{n+1}

Exercice 81 (Méthode de Householder)**.** Soit $n \geq 1$. On cherche une méthode pour obtenir la décomposition QR de $A \in M_n(\mathbb{R})$ autrement que par l'algorithme de Gram-Schmidt, qui est numériquement instable.

1. Pour $v \in \mathbb{R}^n$ non nul, on définit la matrice (de Householder)
$$H(v) = I_n - 2\frac{vv^*}{v^*v}.$$
Montrer que $H(v)$ est une isométrie. Laquelle ?
2. Soit $e \in \mathbb{R}^n$ de norme unité $\|e\| = 1$. Montrer que
$$\forall v \in \mathbb{R}^n, \quad H(v - \|v\|e)\, v = \|v\|e.$$
3. En déduire une algorithme permettant d'obtenir la décomposition QR de A.

Exercice 82 (Inégalité de Poincaré)**.** On note
$$W = \left\{ f \in C^1(]0,1[) \cap C^0[0,1], \quad \int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x < +\infty, f(0) = f(1) = 0 \right\}.$$
Montrer qu'il existe $C > 0$ telle que
$$\forall f \in W, \quad \int_0^1 |f(x)|^2 \mathrm{d}x \leq C \int_0^1 |f'(x)|^2 \mathrm{d}x.$$
Quelle est la constante C optimale ?

14 Convexité

Exercice 83. Soit $n \geq 1$. Montrer que la boule unité de $M_n(\mathbb{R})$ est l'enveloppe convexe de $O_n(\mathbb{R})$.

Exercice 84 (Gradient à pas fixe 1D)**.** On considère $f \in C^2(\mathbb{R})$ telle que $f'' \geq \alpha > 0$.

1. Montrer que f vérifie
$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad (f'(x) - f'(y))(x - y) \geq \alpha(x-y)^2$$
2. On considère un paramètre $h > 0$ "assez petit" et $x_0 \in \mathbb{R}$ et on définit la suite (x_n) par
$$x_{n+1} = x_n - hf'(x_n).$$
La suite converge-t-elle ? Vers quelle limite ?

Exercice 85 (Fonctions fortement convexes)**.** On dit que $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est *fortement convexe* s'il existe $\alpha > 0$ telle que

$$f(tx + (1-t)y) \leq tf(x) + (1-t)f(y) - \frac{1}{2}\alpha t(1-t)(x-y)^2$$

pour $x, y \in \mathbb{R}$ et $0 \leq t \leq 1$.

Montrer qu'une fonction $f \in C^2$ est fortement convexe si et seulement s'il existe $\alpha > 0$ avec $f'' \geq \alpha$.

Exercice 86. On considère $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ convexe.

1. La fonction admet-elle nécessairement un minimum ? Peut-il y avoir plusieurs minima.
2. Que dire si f est strictement convexe ?
3. On suppose que f est fortement convexe. Que dire ?

Exercice 87. Montrer qu'une fonction $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ est convexe si et seulement si f est le supremum d'une famille de fonctions affines.

15 Calcul différentiel

Exercice 88 (Décomposition polaire)**.** L'objectif de cet exercice est de montrer l'existence de la décomposition polaire par une méthode variationelle. Soit $n \geq 1$ et $A \in GL_n(\mathbb{R})$. On pose

$$\phi : \begin{array}{c} O_n(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R} \\ U \longmapsto \mathrm{Tr}(UA) \end{array}.$$

1. Montrer que l'application ϕ admet un maximum global V. Dans la suite de l'exercice, nous allons montrer que VA est symétrique définie positive.
2. On considère $\gamma : \mathbb{R} \longrightarrow O_n(\mathbb{R})$ un arc C^1 tel que $\gamma(0) = V$. On note $\Gamma = \gamma'(0)$. Montrer que
$${}^t\Gamma V + {}^tV\Gamma = 0.$$
Dans la suite, on admet que si $\Gamma \in M_n(\mathbb{R})$ vérifie la condition ${}^t\Gamma V + {}^tV\Gamma = 0$ alors il existe un arc paramètré γ comme décrit ci-dessus.
3. Montrer que $S := VA \in S_n(\mathbb{R})$.
4. Montrer qu'en fait S est définie positive.

Exercice 89 (Principe du maximum)**.** Soit $d \geq 1$ et $B \subset \mathbb{R}^d$ la boule unité ouverte. On considère $f \in C^2(B) \cap C^0(\bar{B})$.

1. On suppose que
$$\begin{cases} \Delta f > 0 & \text{dans } B \\ f = 0 & \text{sur } \partial B \end{cases}.$$
Montrer que $f < 0$ sur B.
2. On suppose que
$$\begin{cases} \Delta f \geq 0 & \text{dans } B \\ f = 0 & \text{sur } \partial B \end{cases}.$$
Montrer que $f \leq 0$ sur B.

3. On suppose que
$$\begin{cases} \Delta f = 0 & \text{dans } B \\ f = 0 & \text{sur } \partial B \end{cases}.$$
Montrer que $f = 0$ sur B.

Exercice 90 (Une équation de transport)**.** On considère $n \geq 1$ et $A : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$ une application continue. Soit $u_0 \in C^1(\mathbb{R}^n)$. Montrer que le problème aux dérivées partielles

$$\begin{cases} \partial_t u(t,x) + \langle A(t)x | \nabla u(t,x) \rangle = 0 \\ u(0,x) = u_0(x) \end{cases}$$

admet une unique solution $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$.

Indication : on pourra considérer la fonction $g(t) = u(t, x(t))$, où x est un arc paramètré bien choisi.

Exercice 91 (Méthode d'Armijo)**.** Soit $d \geq 1$, $\alpha_0 > 0$, $r \in]0,1[$ et $f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^1 que l'on cherche à minimiser. On fixe $0 < \beta < 1$ dans tout le problème.

On définit une suite $(x_n)_n$ de points de $\mathbb{R}^d$ de la manière suivante : $x_0 \in \mathbb{R}^d$ est arbitraire et
$$x_{n+1} = x_n - \alpha_n \nabla f(x_n),$$
où $\alpha_n = r_0 r^{k_n}$ et où k_n est le plus petit entier k tel que
$$f\left(x_n - \alpha_0 r^k \nabla f(x_n)\right) \leq f(x_n) - \beta \alpha_0 r^k \|\nabla f(x_n)\|^2.$$

1. Montrer que la suite (x_n) est bien définie.
2. On suppose que ∇f est une fonction γ-lipschitzienne. Montrer que, lorsque $n \to +\infty$,
$$\begin{cases} \text{ou bien } f(x_n) \longrightarrow -\infty \\ \text{ou bien } \nabla f(x_n) \longrightarrow 0 \end{cases}.$$

Exercice 92 (lemme d'intégrabilité de Jordan)**.** On considère $n \geq 1$ et $f : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ une application de classe C^1. Montrer que $\partial_i f_j - \partial_j f_i = 0$ pour tous $1 \leq i, j \leq n$ si et seulement si il existe $g : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ telle que $f = \nabla g$.

16 Anneaux, corps et arithmétique

Exercice 93. Un nombre premier peut-il être suivi par un cube ?

Exercice 94. Soit p un nombre premier et $n \geq 1$. Donner une condition nécessaire et suffisante de diagonalisabilité dans $M_n(\mathbb{F}_p)$.

Exercice 95.

1. Soit $K \subset L$ une extension de corps commutatifs telle que $\dim_K(L) < +\infty$ et $x \in L - K$. On considère l'application K-linéaire suivante :
$$L_x : \begin{array}{c} L \longrightarrow L \\ y \longmapsto xy \end{array}.$$
Montrer que le polynôme caractéristique de L_x est une puissance de son polynôme minimal.

2. Soit $p_1, ..., p_r$ des nombres premiers distincts, $K = \mathbb{Q}$ et $L = \mathbb{Q}(\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_r})$. Calculer $\mathrm{Tr}(L_{\sqrt{p_i p_j}})$.
3. En déduire $\mathrm{rg}_{\mathbb{Q}}\{\sqrt{p_1}, ..., \sqrt{p_r}\}$.

Exercice 96. L'objet de cet exercice est de déterminer le groupe $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$. On verra qu'il est isomorphe à $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$.

1. Pour $z = x + y\sqrt{2} \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]$, on pose $N(z) = x - y\sqrt{2}$. Montrer que $z \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ si et seulement si $N(z) = 1$.
2. Soit $u \in \mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times$ tel que $1 \leq u < 1 + \sqrt{2}$. Montrer que $u = 1$.
3. Montrer que $\mathbb{Z}[\sqrt{2}]^\times = \{\pm(1+\sqrt{2})^n, \quad n \in \mathbb{Z}\}$.

Exercice 97. Dresser la liste des polynômes irréductibles de $\mathbb{F}_2[X]$ de degrés inférieurs ou égaux à 5.

Exercice 98. On considère $p \geq 2$ un nombre premier, $P \in \mathbb{F}_p[X]$ un polynôme de degré $d \geq 2$ et on note E l'espace des polynômes $Q \in \mathbb{F}_p[X]$ de degré $\deg(Q) < d$. Nous nous intéressons à l'application suivante :

$$\phi : \begin{array}{l} E \longrightarrow E \\ A \longmapsto R \end{array},$$

où $R \in \mathbb{F}_p[X]$ est le reste de la division euclidienne de A^p par P.

1. Montrer que ϕ est un endomorphisme du $\mathbb{F}_p$-espace vectoriel E.
2. On suppose dans cette question que P est irréductible dans $\mathbb{F}_p[X]$. Déterminer tous les éléments de $\ker(\phi - \mathrm{id})$.
3. On ne suppose plus P irréductible. À quelle condition (sur P) l'application ϕ est-elle un isomorphisme ?

Exercice 99. On considère K un corps fini (commutatif) de caractéristique $p \geq 2$. Pour $x \in K$, on considère l'application $\mathbb{F}_p$-linéaire suivante

$$L_x : \begin{array}{l} K \longmapsto K \\ y \longmapsto xy \end{array},$$

dont on note abusivement $\mathrm{Tr}(x) = \mathrm{Tr}(L_x)$ la trace. Montrer que pour toute forme $\mathbb{F}_p$-linéaire $\phi : K \longrightarrow \mathbb{F}_p$ il existe un unique $x \in K$ tel que

$$\forall y \in K, \quad \phi(y) = \mathrm{Tr}(xy).$$

Exercice 100. Soit $p \geq 2$ un nombre premier. Calculer

$$\sum_{x \in \mathbb{F}_p} x^k.$$

17 Connexité

Exercice 101. Soit $A \subset \mathbb{R}^2$ une partie dénombrable. L'ensemble $\mathbb{R}^2 - A$ est-il connexe par arcs ?

Exercice 102. L'ensemble suivant est-il connexe par arcs ?

$$X = \left\{\left(t, \sin\left(\frac{1}{t}\right)\right), \quad t > 0\right\} \cup \{(0,t), \quad 0 \leq t \leq 1\}.$$

Exercice 103. Soit E un espace normé de dimension infinie et K un compact de E. Nous allons montrer que ${}^cK$ est connexe par arcs.

1. Montrer que ${}^cK$ a exactement un composante connexe par arcs non bornée.
2. Soit a élément d'une autre composante connexe par arcs. Montrer que toute droite (affine) passant par a intersecte K.
3. On suppose l'existence d'une telle composante connexe. Construire une suite d'éléments de K sans valeur d'adhérence.

Exercice 104. On considère E un $\mathbb{R}$-espace vectoriel normé de dimension finie. Quelles sont les composantes connexes de l'ensemble des projecteurs de E ?

Exercice 105 (Démontré dans un café)**.** Soit $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une fonction dont le graphe est connexe par arcs. Montrer que f est continue. Que dire pour $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2$?

18 Equations différentielles

Exercice 106 (Une perturbation singulière)**.** Soit $n \geq 1$. On considère $A \in GL_n(\mathbb{R})$, $b \in C^0(\mathbb{R})$, et $\epsilon > 0$ et on s'intéresse au système différentiel suivant :

$$\begin{cases} \epsilon y_\epsilon' = Ay_\epsilon + b(t) \\ y_\epsilon(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}.$$

Etudier la convergence de la suite de fonctions $(y_\epsilon)_\epsilon$ sur $t \in \mathbb{R}_+$. Lorsqu'il y a convergence, identifier la limite.

Exercice 107 (Théorie de Floquet)**.** On considère une application continue périodique $A : \mathbb{R} \longrightarrow M_n(\mathbb{R})$.

1. Montrer qu'il existe une application continue de même périodicité $B : \mathbb{R} \longrightarrow GL_n(\mathbb{R})$ et $C \in M_n(\mathbb{C})$ telles que y soit solution du problème

$$\begin{cases} y' = A(t)y \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

   si et seulement si $z(t) = B(t)y(t)$ est solution du problème à coefficients constants

$$\begin{cases} y' = Cy \\ y(0) = y_0 \in \mathbb{R}^n \end{cases}$$

   Indication : on pourra regarder $R(t)e^{-Ct}$ où $R(t)$ est la résolvante et C est judicieusement choisie.

2. On considère $a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ une application continue T périodique et $\epsilon \in \mathbb{R}$. Discuter de la stabilité de $x = 0$ comme point d'équilibre de

$$x'' + \epsilon x' + a(t)x = 0.$$

Exercice 108. Déterminer les solutions sur $\mathbb{R}$ de l'équation différentielle

$$x'(t) + x(-t) + t = 0.$$

Exercice 109. On considère $p, q \in C^0(\mathbb{R})$ et on regarde l'équation différentielle linéaire

$$x'' + p(t)x' + q(t)x = 0.$$

Trouver une condition nécessaire et suffisante sur p et q pour que l'équation admette deux solutions globales de produit 1.

Exercice 110. On considère deux fonctions continues $a, b : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $a(t) \geq \lambda > 0$ pour $t \in \mathbb{R}$ et

$$b(t) \underset{t \to \pm\infty}{\longrightarrow} 0.$$

On considère encore l'équation différentielle $y' + a(t)y = b(t)$.

1. Montrer que toute solution est de limite nulle pour $t \to +\infty$.
2. Montrer qu'il existe une unique solution de limite nulle en $-\infty$.

Exercice 111. On considère $A, B \in M_n(\mathbb{C})$ telles que A et B commutent avec $C = AB - BA$. Soit $t \in \mathbb{R}$. Exprimer

$$M(t) = \exp(-t(A + B)) \exp(tA) \exp(tB)$$

en fonction de C et t.