Differentialgeometrie I

Aufgabe 5.1 (Krümmung gleichungsdefinierter Kurven)
Die Urbilder von Funktionen $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sind unparametrisierte Kurven, falls auf der betrachteten Urbildmenge (oder Niveaumenge) $h^{-1}(w)$ der Gradient von h nicht verschwindet, $\operatorname{grad} h \neq 0$. Ziel ist, die Krümmung solcher unparametrisierter Kurven zu berechnen, *ohne vorher eine explizite Parametrisierung herstellen zu müssen.*
<u>Denken Sie sich eine Kurve</u> $t \mapsto (x(t), y(t)) \in h^{-1}(w)$, also $h(x(t), y(t)) = w$. Daraus folgt

$$(\frac{\partial}{\partial x}h, \frac{\partial}{\partial y}h) \cdot (\begin{matrix} \dot{x}(t) \\ \dot{y}(t) \end{matrix}) = 0.$$

Daher ist $(\frac{\partial}{\partial x}h, \frac{\partial}{\partial y}h)$ proportional zur Einheitsnormale n und $(-\frac{\partial}{\partial y}h, \frac{\partial}{\partial x}h)$ ist proportional zum Tangentialvektor $\dot{c}(t) = (\dot{x}(t), \dot{y}(t))$. Man kann also die Krümmung κ (mit der Definition $\dot{n} = \kappa \cdot \dot{c}$) aus partiellen Ableitungen von h berechnen, ohne die gedachte Parametrisierung $(x(t), y(t))$ wirklich zu kennen. Wie?

Aufgabe 5.2 (Frenet-Theorie: Schmiegkugeln und sphärische Kurven)
Da sphärische Kurven immer $1 \leq \kappa$ haben, sind diese Kurven gute Beispiele zur Frenet-Theorie.
Eine Kugel $K := \{x \in \mathbb{R}^3;\ \langle x - m, x - m\rangle - R^2 = 0\}$ heißt "Schmiegkugel" einer Raumkurve c, wenn die das *Abheben von der Kugel* beschreibende Funktion $h(s) := \langle c(s) - m, c(s) - m\rangle - R^2$ bei $s = s_0$ mit möglichst vielen Ableitungen verschwindet:
$h(s_0) = 0 \Rightarrow R := |c(s_0) - m|$ ($c(s_0)$ liegt auf der Kugel)
$h'(s_0) = 0 \Rightarrow \langle c'(s_0), c(s_0) - m\rangle = 0$ (Radiusvektor $\perp$ Tangente)
$h''(s_0) = 0 \Rightarrow \langle c''(s_0), c(s_0) - m\rangle = -\langle c'(s_0), c'(s_0)\rangle$ (Schmiegkreis $\subset$ Kugel)
$h'''(s_0) = 0 \Rightarrow \langle c'''(s_0), c(s_0) - m\rangle = 0$ (Genaue Lage von m).

(a) Hieraus soll der Radiusvektor $m - c(s_0)$ als Linearkombination der Frenet-Basis berechnet werden; dazu fehlt nur, c''' durch Differenzieren der Frenet-Gleichungen zu berechnen.
(b) Dafür, daß die Kurve c auf einer Sphäre liegt, ist sicherlich notwendig, daß die Kurve $m(s)$ der Schmiegkreismittelpunkte konstant ist. Sie finden $m'(s) = factor \cdot \boldsymbol{\mathcal{B}}(t)$, wobei der $factor$ eine Funktion der Frenetdaten ist, welche? Aus $m'(s) = 0$ folgt auch $R'(s) = 0$, also die Konstanz der Schmiegkugeln. Daher liegt c auf dieser Kugel.

Aufgabe 5.3 (Tori, parametrisiert und als Niveaus)
Der Standardtorus $T^2 = \mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$ wird durch

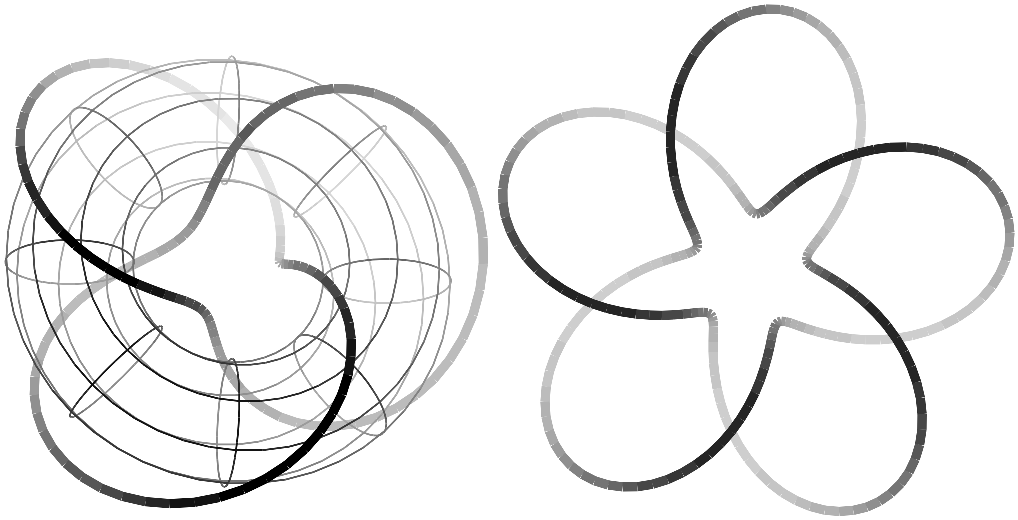
$$F_{r,R}(u, v) := \begin{pmatrix} (R + r\cos u)\cos v \\ (R + r\cos u)\sin v \\ r \sin u \end{pmatrix} \qquad 0 \leq u, v \leq 2\pi$$

für $R > r > 0$ nach $\mathbb{R}^3$ abgebildet, als parametrisierte Fläche.
(a) Prüfen Sie nach, daß die Tori $F_{r,\sqrt{1+r^2}}$ Niveauflächen $\{f = R^2\}$ der außerhalb der z-Achse definierten Funktion $f(x, y, z) := (x^2 + y^2 + z^2 + 1)^2/(4(x^2 + y^2))$ sind. Berechnen Sie, wo $\operatorname{grad} f \neq 0$ ist; gehen Tori durch diese Punkte?
(b) Die Sphären $\{x^2 + y^2 + (z - m)^2 = 1 + m^2\}$ enthalten den Einheitskreis in der x, y-Ebene. Warum werden die Tori $F_{r,\sqrt{1+r^2}}$ von diesen Sphären senkrecht geschnitten? (Berechnen Sie die Normalen der beiden Flächenscharen oder zeichnen Sie die Schnittkreise mit der x-z-Ebene; ein Schnittpunkt und die beiden Kreismittelpunkte bilden ein rechtwinkliges Dreieck.)

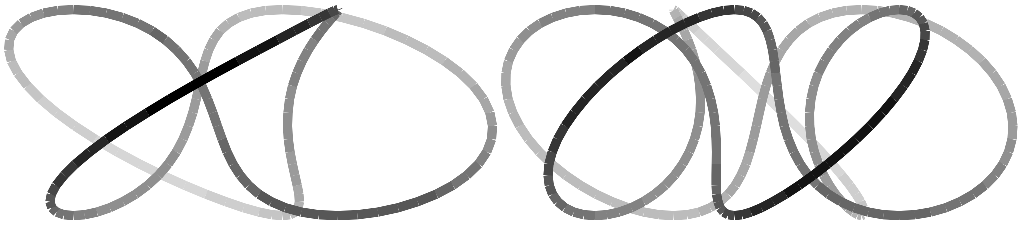
Aufgabe 5.4 (Torusknoten und minimal rotierende Basen)
Kurven auf den parametrisierten Tori von Aufgabe 5.3 erhält man mit Hilfe von Funktionen $t \mapsto (u(t), v(t))$. Wählt man zu teilerfremden ganzen Zahlen $m, n \geq 2$ die Funktionen $u(t) := mt,\ v(t) := nt$, so erhält man *Torusknoten* als $c(t) = F(u(t), v(t))$.

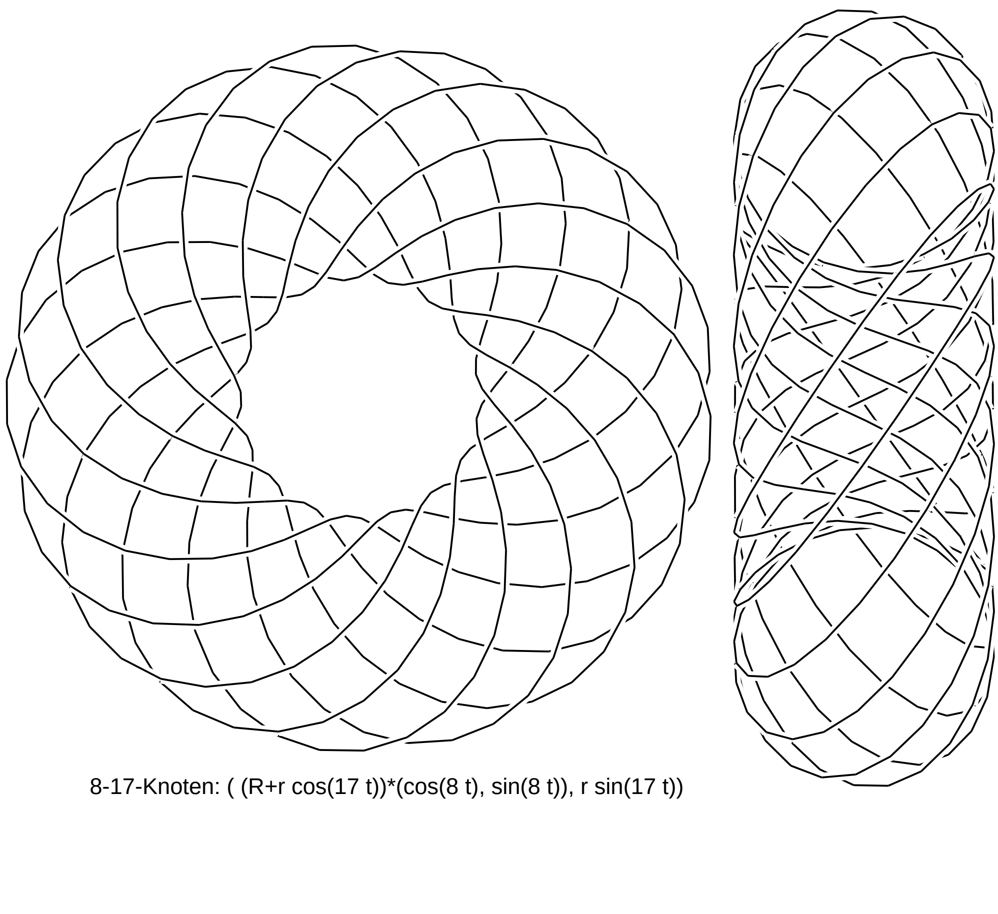
(a) Berechnen Sie die Krümmung $\kappa(t)$ dieser Torusknoten.

(b) Welche Differentialgleichung muß man lösen, um minimal rotierende Vektorfelder $v(t) \perp \dot{c}(t)$ zu erhalten?



2-3-Torusknoten und 2-5-Torusknoten von oben, von vorn





8-17-Knoten: ((R+r cos(17 t))*(cos(8 t), sin(8 t)), r sin(17 t))