Übungsblatt 8

Aufgabe 1

Wir möchten mehr über das Wetter in Bonn erfahren. Ein "Wettervektor" (für einen bestimmten Tag) ist ein Vektor $v = \binom{p}{q}$ mit $0 \leq p, q \leq 100\%$ und $p + q = 100\%$. Er drückt aus, dass an diesem Tag mit Wahrscheinlichkeit p die Sonne scheint und es mit Wahrscheinlichkeit q regnet. Spezifisch für Bonn sei die "Wettermatrix"

$$A := \begin{pmatrix} 0,7 & 0,4 \\ 0,3 & 0,6 \end{pmatrix}$$

gegeben. Sie gibt an, mit welchen Wahrscheinlichkeiten auf einen Sonnen-/Regentag ein Sonnen-/Regentag folgt. D.h. falls v der Wettervektor für einen Tag ist, so ist Av der Wettervektor des Folgetags.[1]

Heute scheint die Sonne $v_0 := \binom{100\%}{0}$. Bestimme die Wettervektoren für morgen Av_0 und übermorgen $A^2 v_0$. Bestimme den Wettervektor für den 27. Mai nächstes Jahr

$$A^{365} v_0.$$

Aufgabe 2

Diagonalisiere die folgende Matrix,

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & \\ 1 & 2 & 1 \\ & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Aufgabe 3

(a) Finde die Nullstellen von $X^4 - 3X^3 - 11X^2 + 3X + 10$.

(b) Finde die Nullstellen von $X^3 - 4X^2 + 4X - 1$.

Aufgabe 4

Sei A die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}.$$

(a) Bestimme die beiden Eigenwerte λ_1 und λ_2 und zeichne die beiden Eigenräume (jeweils eine Gerade) in ein Schaubild.

[1] Das Übergangsverhalten ist ein Beispiel für eine sog. Markov-Kette. Diese werden in der Stochastik studiert; "Wettervektoren" und die "Wettermatrix" sind Beispiele für sog. stochastische Vektoren und stochastische Matrizen.

(b) Skizziere im selben Schaubild alle Punkte (x, y), die die Gleichung

$$(x\ y) A \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 4$$

erfüllen. Dies ergibt eine Ellipse. Interpretiere die Eigenräume und das Verhältnis λ_1/λ_2 in Termen der Ellipse.