①

<u>Erinnerung:</u> $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$.

Eigenwerte von A = Nullstellen von

$$P_A = \det(\lambda \cdot E_n - A)$$

$\uparrow$ Polynom n-ten Grades.

<u>Leider gilt:</u>

<u>Thm</u> (Abel-Ruffini)

Für Polynome vom Grad ≥ 5 gibt es keine allgemeine Lösungsformel (mittels $+, \cdot, \sqrt[k]{-}, -, \%$)

Es gibt also keinen Algorithmus um Eigenwerte im Allgemeinen zu bestimmen. Für Polynome vom Grad 2 gibt es natürlich die quadratische Ergänzung bzw. die Formel

$$x^2 + ax + b = 0 \iff x = \frac{-a}{2} \pm \sqrt{\frac{a^2}{4} - b}$$

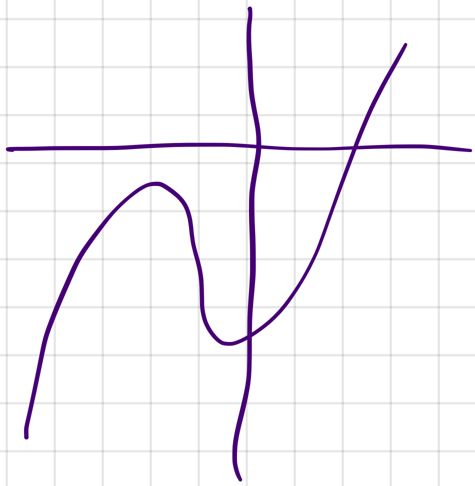
Für $n=3$ there is <u>Cardano's formula</u>

$x^3 + bx^2 + cx + d = 0 \iff$

$$x = -\frac{b}{3} + \xi \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} + \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}} + \xi^2 \cdot \sqrt[3]{-\frac{q}{2} - \sqrt{\frac{q^2}{4} + \frac{p^3}{27}}}$$

mit $p = \frac{3c - b^2}{3}$ und $q = \frac{3b^3 - 9bc + 27d}{27}$, und $\xi^3 = 1$.

Hierzu gibt es einiges zu bemerken: Jedes Polynom dritten Grades hat eine reelle Nullstelle (wegen des Zwischenwertsatzes aus der Analysis: Für große x ist $x^3+ax^2+bx+c>0$ und für kleine x (also x sehr negativ) ist $x^3+ax^2+bx+c<0$. Dazwischen muss eine Nullstelle liegen!) Die Cardano'sche Formel liefert für $\xi=1$ immer eine solche. Aber die auftretende Wurzel $\sqrt{\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}}$ muss nicht unbedingt reell sein; abgefahren oder?



<u>Satz</u> (Wantzel)

Im "casus irreducibilis" $\frac{q^2}{4}+\frac{p^3}{27}<0$ gibt es keinen Ausdruck für die Lösung der nur $+,\cdot,\sqrt{\ },-,1/$ benutzt und jede Wurzel im reellen gezogen werden kann.

Das alles eher zur Information. Wir werden nicht erwarten, dass ihr diese Formeln oder Sätze beherrscht. Im Falle eines Polynoms vom Grad ≥ 5 wird man eine Lösung entweder raten oder sich mit Näherungen zufrieden geben müssen.

Wenn man eine Nullstelle gefunden hat ist das folgende nützlich:

<u>Satz</u>

Sind P, Q reelle Polynome, so gibt es eindeutig bestimmte Polynome F und R mit

1) $P = F \cdot Q + R$
2) $\mathrm{Grad}(R) < \mathrm{Grad}(Q)$.

Insbesondere gilt

λ ist Nullstelle von $P \iff (X-\lambda)$ teilt P.

Man kann also, hat man eine Nullstelle von P einmal gefunden, den Grad von P um 1 verringern (indem man durch $(X-\lambda)$ teilt) bevor man die nächste Nullstelle sucht.

<u>Def</u> Für ein Polynom P und eine Nullstelle λ von P nennt man die Zahl

$$\mathrm{mult}_P(\lambda) = \max\{n \in \mathbb{N} \mid (X-\lambda)^n \text{ teilt } P\}$$

die <u>Vielfachheit</u> von λ.

<u>Cor</u> Ein Polynom n-ten Grades hat höchstens n Nullstellen. Sogar

$$\sum_{\lambda \text{ NST}} \mathrm{mult}_P(\lambda) \leq n.$$

Zum finden von F und R benutzt man die Polynomdivision mit Rest:

1) Gilt $\mathrm{Grad}(Q) > \mathrm{Grad}(P)$ so setzt man einfach $F=0$ und $R=P$.

2) Ansonsten nehme man den höchsten Term von P und teile ihn durch den höchsten Term von Q. Ist das Ergebnis E so gilt

$$P = E\cdot Q + (P - E\cdot Q)$$

Nun gilt $\mathrm{Grad}(P-E\cdot Q) < \mathrm{Grad}(P)$. Gilt sogar $\mathrm{Grad}(P-E\cdot Q) < \mathrm{Grad}(Q)$ so setze $R = PQ - E$. Sonst verfahre man mit $P-E\cdot Q$ anstatt P genauso.

3) Man summiere alle als E gewonnenen Terme auf. Das Ergebnis ist F.

<u>Beispiel:</u> P , $Q = x^2+x+1$

$$x^5 + 7x^3 + 2x^2 + x + 3$$
$$= x^3(x^2+x+1) + (-x^4 + 6x^3 + 2x^2 + x + 3)$$
$$= (x^3 - x^2)(x^2+x+1) + (7x^3 + 3x^2 + x + 3)$$
$$= (x^3 - x^2 + 7x)(x^2+x+1) + (-4x^2 - 6x + 3)$$
$$= \underbrace{(x^3 - x^2 + 7x - 4)(x^2+x+1)}_{F} + \underset{\substack{!!\\ R}}{(-2x+7)}$$

Bsp Nullstellen von $P = x^3 + x^2 - x - 1$: Scharfes Hinsehen liefert die Nullstelle 1. Dann berechne

$$\begin{aligned} x^3 + x^2 - x - 1 &= x^2(x-1) + (2x^2 - x - 1) \\ &= (x^2 + 2x)(x-1) + (x-1) \\ &= (x^2 + 2x + 1)(x-1) \end{aligned}$$

Die anderen beiden Nullstellen sind die von

$$x^2 + 2x + 1 = (x+1)^2$$

also 1 ist NST von P mit Vielfachheit 1
und -1 ist NST von P mit Vielfachheit 2.

Def: Man sagt P zerfällt in Linearfaktoren, wenn

$$P = (X - \lambda_1) \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_n). \qquad \lambda_i \in \mathbb{R}$$

Dies gilt genau, wenn $\sum_{\lambda \text{ NST}} \mathrm{mult}_P(\lambda) = n$.

Proposition Sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$.

1) Es gilt $\dim \mathrm{Eig}_\lambda(A) \leq \mathrm{mult}_{P_A}(\lambda)$
2) A ist diagonalisierbar
   $\iff$ a) P_A zerfällt in Linearfaktoren
   \+ b) Es gilt $\dim \mathrm{Eig}_\lambda(A) = \mathrm{mult}_{P_A}(\lambda)$ für alle Eigenwerte λ von P_A.

Man nennt $\dim \mathrm{Eig}_\lambda(A)$ manchmal die geometrische Vielfachheit und $\mathrm{mult}_{P_A}(\lambda)$ die algebraische.

[zu 1): Wähle eine Basis des Eigenraumes zu λ $b_1, \dots, b_k$ und ergänze sie zu einer Basis $\mathcal{B}$. Dann gilt $A_{\mathcal{B}\mathcal{B}} = \left(\begin{matrix} \lambda & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda \end{matrix} \middle| * \right)$ und deshalb

$$\begin{aligned} P_A = \det(\mu \cdot E_n - A) &= \det(W_{\mathcal{B}}^{-1} \cdot (\mu \cdot E_n - A) \cdot W_{\mathcal{B}}) \\ &= \det(\mu \cdot E_n - A_{\mathcal{B}\mathcal{B}}) \\ &= (\mu - \lambda)^k \cdot P \quad \text{für ein } P \text{ vom Grad } n-k. \end{aligned}$$

zu 2): Folgt direkt aus

$$A \text{ diagonalisierbar} \iff \sum_{\lambda \text{ EW}} \operatorname{Eig}_\lambda(A) = n \quad \lrcorner$$

Wir haben nun den großen:

<u>Theorem</u> (Fundamentalsatz der Algebra)

Jedes Polynom n-ten Grades hat mit Vielfachheit gezählt n komplexe Nullstellen, zerfällt also über $\mathbb{C}$ in Linearfaktoren.

Der Beweis geht über unsere Vorlesung hinaus.

Nun zurück zu den symmetrischen Matrizen. Wir brauchen:

<u>Beobachtung</u> $A \in \operatorname{Mat}(n,n)$

1) Es gilt $\langle x, Ay \rangle = \langle A^T x, y \rangle$
2) A ist orthogonal $\iff \langle Ax, Ay \rangle = \langle x, y \rangle$ $\quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$
3) A ist symmetrisch $\iff \langle x, Ay \rangle = \langle Ax, y \rangle$

Orthogonale Matrizen erhalten also Winkel!

⌈

zu 1): $\langle x, A\cdot y\rangle = \sum_i x_i \cdot (A\cdot y)_i$

$= \sum_{ij} x_i A_{ij} y_j$

$\langle A^T x, y\rangle = \sum_j (A^T x)_j y_j$

$= \sum_{ji} A^T_{ji} x_i y_j$

zu 2): "$\Leftarrow$"

aus $Ax = 0$ folgt $\langle x,x\rangle = \langle Ax, Ax\rangle = 0$

also $x = 0$, also $\ker A = 0 \Rightarrow A$ invertierbar.

Also

$\langle A^T A x, e_i\rangle = \langle Ax, Ae_i\rangle = \langle x, e_i\rangle = x_i$

$(A^T A)_{ij} = \langle (A^T A)\cdot e_i, e_j\rangle = \langle Ae_i, Ae_j\rangle = \langle e_i, e_j\rangle$

$= \begin{cases} 1 & i=j \\ 0 & i\neq j \end{cases}$

$\rightarrow \quad A^T \cdot A = E_n \Rightarrow A^T = A^{-1}$.

"$\Rightarrow$" Ausdrücken:

$\langle Ax, Ay\rangle = \langle A^T A x, y\rangle = \langle A^{-1} A x, y\rangle = \langle x, y\rangle$.

zu 3): "$\Leftarrow$":

$(A^T)_{ij} = \langle A^T \cdot e_i, e_j\rangle = \langle e_i, A\cdot e_j\rangle$

$= \langle A\cdot e_i, e_j\rangle$

$\Rightarrow A$ symmetrisch $= A_{ij}$

"$\Rightarrow$": direkt aus 1). ⌋

Proposition Sei $A \in \mathrm{Mat}(n,n)$ symmetrisch.

1) Für jeden Eigenvektor v von A gilt
$$A \cdot v^\perp \subseteq v^\perp.$$

2) Eigenvektoren zu verschiedenen Eigenwerten von A stehen orthogonal.

3) Jede (komplexe) NST von P_A ist automatisch reell.

⌜ ad 1): Es gilt
$$\langle A \cdot u, v\rangle = \langle u, A \cdot v\rangle = \langle u, \lambda v\rangle$$
$$= \lambda \cdot \langle u, v\rangle$$
also $\langle u,v\rangle = 0 \Rightarrow \langle A \cdot u, v\rangle = 0$.

ad 2): Sind u,v Eigenvektoren zu $\lambda \neq \mu$, so gilt
$$\mu \cdot \langle u,v\rangle = \langle u, \mu v\rangle = \langle u, Av\rangle = \langle Au, v\rangle$$
$$= \langle \lambda u, v\rangle$$
$$= \lambda \langle u,v\rangle$$
was nur für $\langle u,v\rangle = 0$ möglich ist.

ad 3): Nach dem Fundamentalsatz der Algebra hat P_A eine komplexe NST $\lambda \in \mathbb{C}$. Mittels der gleichen Theorie wie im reellen, gibt es dann zu λ ein $0 \neq v \in \mathbb{C}^n$ mit
$$Av = \lambda \cdot v.$$

Es folgt

$$\lambda \cdot \langle v, \bar{v} \rangle = \langle \lambda \cdot v, \bar{v} \rangle = \langle A \cdot v, \bar{v} \rangle = \langle v, A \cdot \bar{v} \rangle$$
$$= \langle v, \bar{A} \cdot \bar{v} \rangle = \langle v, \overline{A \cdot v} \rangle = \langle v, \overline{\lambda \cdot v} \rangle = \langle v, \bar{\lambda} \bar{v} \rangle$$
$$= \bar{\lambda} \langle v, \bar{v} \rangle.$$

Nun gilt aber $\langle v, \bar{v} \rangle \in \mathbb{R}_{>0}$:

$$\langle v, \bar{v} \rangle = \sum v_i \bar{v_i} = \sum |v_i|^2$$

Also $\lambda = \bar{\lambda}$, $\Rightarrow \lambda \in \mathbb{R}$. ⌟

Beweis des Satzes von der Hauptachsentransformation:

⌜ Nach dem Fundamentalsatz der Algebra und Teil 3) der vorigen Proposition zerfällt P_A für A symmetrisch in Linearfaktoren, etwa

$$P_A = (X - \lambda_1)^{n_1} \cdot \ldots \cdot (X - \lambda_k)^{n_k}$$

für paarweise verschiedene $\lambda_i \in \mathbb{R}$. Es bleibt

$$\dim \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A) = \mathrm{mult}_p(\lambda_i) \quad \forall i$$

zu zeigen. Sei dafür v Eigenvektor zu λ_i. Setze $b_1 := v/|v|$ und ergänze b_1 zu einer ONB B von $\mathbb{R}^n$ (mittels Steinitz und Gram-Schmidt). Wegen Teil 1) der letzten Proposition gilt

$$A_{BB} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & & & \\ \vdots & & A' & \\ 0 & & & \end{pmatrix} \quad \text{mit } A' \in \mathrm{Mat}(n,n)$$

A' ist auch symmetrisch weil B eine ONB ist.

Weiter gilt
$$P_A = (X-\lambda_i)\cdot P_{A'}$$
sodass
$$\mathrm{mult}_{P_{A'}}(\lambda_i) = \mathrm{mult}_{P_A}(\lambda_i) - 1.$$
Ebenso gilt offenbar
$$\dim \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A') = \dim \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A) - 1.$$
Wir haben das Problem damit auf kleineres n_i zurückgeführt. Das geht solange bis $\mathrm{mult}_{P_{A^{(n)}}}(\lambda_i)=0$. Aber dann ist λ_i kein Eigenwert von $A^{(n)}$ also
$$\begin{aligned}\dim \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A) &= \dim \mathrm{Eig}_{\lambda_i}(A^{(n)}) + n \\ &= n \\ &= \mathrm{mult}_{P_{A^{(n)}}}(\lambda_i) + n \\ &= \mathrm{mult}_{P_A}(\lambda_i). \;\lrcorner\end{aligned}$$

Man kann die Diagonalgestalt allerdings geschickter berechnen als mit dem Algorithmus des Beweises.

Schritt 1): Bestimme Eigenwerte von A mittels charakteristischem Polynom (und Glück!)

Schritt 2): Bestimme Basen von $\mathrm{Eig}_\lambda(A)$ für alle Eigenwerte λ mittels Gauß-Jordan.

Schritt 3): Orthonormiere diese Basen mittels Gram-Schmidt.

Wegen Teil ii) der Proposition erhält man so eine diagonalisierende ONB.

Bsp: $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \end{pmatrix}$

$$P_A = \det \begin{pmatrix} \lambda-1 & -2 & 0 \\ -2 & \lambda-1 & -2 \\ 0 & -2 & \lambda-1 \end{pmatrix}$$

$$= (\lambda-1)^3 - 8(\lambda-1)$$
$$= (\lambda-1)\left((\lambda-1)^2 - 8\right)$$

Eigenwerte $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 1 + 2\cdot\sqrt{2}$, $\lambda_3 = 1 - 2\cdot\sqrt{2}$

$\rightsquigarrow$ Diagonalgestalt ist

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1+2\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1-2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

Um eine diagonalisierende Matrix zu finden:

$$\ker \begin{pmatrix} 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\ker \begin{pmatrix} 2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ -2 & 2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & -2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & \sqrt{2} & -2 \\ 0 & -2 & 2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & -1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & -\sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\ker \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} & -2 & 0 \\ -2 & -2\sqrt{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix} = \ker \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & -\sqrt{2} & -2 \\ 0 & -2 & -2\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$$= \ker \begin{pmatrix} 1 & 1/\sqrt{2} & 0 \\ 0 & 1 & \sqrt{2} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix} = \operatorname{span} \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{2} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\rightsquigarrow \quad W_B = 1/2 \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1 & 1 \\ 0 & \sqrt{2} & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 1 & 1 \end{pmatrix} .$$