Prof. Dr. M. Rapoport
Dr. E. Hellmann WS 2011/12

Lineare Algebra I

Übungsblatt 3

Abgabe 04.11.2011

Aufgabe 1:

(i) Welche der folgenden Teilmengen des $\mathbb{R}^3$ sind linear abhängig?

$$M_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} e \\ 0 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix} \right\}.$$

(ii) Es sei

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} \right\},\ b_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix},\ b_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass B eine Basis des $\mathbb{Q}^4$ ist. Ersätze gemäß dem Basisergänzungssatz zwei Vektoren aus B durch die Vektoren b_1 und b_2, so dass wieder eine Basis vorliegt.

Aufgabe 2:

Es sei p eine Primzahl und $\mathbb{F}_p = \{0, 1, \ldots, p-1\}$. Definiere eine Abbildung $f_p : \mathbb{Z} \to \mathbb{F}_p$ durch

$$f_p(m) = r \text{ falls } p | m - r.$$

Mit anderen Worten ist $f_p(m)$ der Rest von m bei Division durch p. Definiere nun eine Addition $+_p$ und eine Multiplikation $\times_p$ auf $\mathbb{F}_p$ wie folgt: Für $a, b \in \{0, \ldots, p-1\} = \mathbb{F}_p$ sei

$$a +_p b = f_p(a + b),$$
$$a \times_p b = f_p(ab).$$

(i) Zeige, dass für alle $a, b \in \mathbb{Z}$ gilt

$$f_p(a + b) = f_p(a) +_p f_p(b),$$
$$f_p(ab) = f_p(a) \times_p f_p(b).$$

(ii) Zeige, dass $\mathbb{F}_p$ mit den Verknüpfungen $+_p$ und $\times_p$ ein Körper ist.

Aufgabe 3:

(a) Gib ein Beispiel eines Vektorraums V und einer Teilmenge $M \subset V$ an, so dass für alle $v, w \in M$ mit $v \neq w$ die Vektoren v und w linear unabhängig sind, die Menge M jedoch linear abhängig ist.

(b) Sei K ein Körper sowie V ein K-Vektorraum und $M = \{v_1, \ldots, v_n\} \subset V$ eine Teilmenge mit $0 \notin M$. Zeige, dass M genau dann linear unabhängig ist, wenn für alle $i \in \{1, 2, \ldots, n-1\}$ gilt:

$$\langle v_1 \ldots, v_i \rangle \cap \langle v_{i+1}, \ldots, v_n \rangle = \{0\}.$$

Aufgabe 4:

(i) Es seien die folgenden Vektoren in $V = \mathbb{Q}^4$ gegeben:

$$a = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ -3 \end{pmatrix}, \; b = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \; c = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \; d = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

Sei U der von a, b, c, d erzeugte Unterraum. Gib eine Basis von U an.

(ii) Es seien nun

$$W = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 6 \\ -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\rangle, \; W' = \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle.$$

zwei Unterräume des $\mathbb{Q}^4$. Bestimme Basen der Unterräume $W + W'$ und $W \cap W'$.

Homepage: `www.math.uni-bonn.de/people/hellmann/LA_I`